plus-klas

kwantum (computer)cursus

met opgaven

Philip Habing
philiphabing(at)gmail.com
Leiden en Amersfoort

Compiled at: 28 februari 2018, vs3.1
Graag contact als je het materiaal gebruikt.

Inhoud

0 Inleiding

— Quantum mechanics is not a theory, but rather a framework within which we believe any correct theory must fit.
Murray Gell-Mann, 1969.

De kwantummechanica is gebaseerd op vijf regels. Voor een geïnteresseerde leerling in 5v-6v, die kan differentiëren en met vectoren kan omgaan, zijn die regels – en daarmee de kern van kwantummechanica – te begrijpen.

Of noem ze wetten of axioma's.

Als je de regels in de vingers hebt, kun je deze vrij eenvoudig toepassen op een zogeheten qubit, de rekeneenheid van de kwantumcomputer. Vat je de werking van een qubit, dan levert dat vermoedelijk inzicht in de kwantummechanica en inzicht in de kwantumcomputer.

Het idee van een kwantumcomputer komt uit ongeveer 1971 maar het is pas de laatste 15 jaar dat het ding eindelijk kan worden gemaakt, bijvoorbeeld door IBM maar ook in Nederland door de Qutech-Qusoft consortium. Waarom is er zo'n hype over de kwantumcomputer? Bepaalde soort onoplosbaar geachte rekenkundige problemen die de huidige computer nooit zal kunnen oplossen, kan de kwantumcomputer vermoedelijk wel oplossen. De kwantumcomputer is goed in rekenen aan: (a) grote moleculen (denk aan medicijnen), (b) complexe chemische reacties, (c) encryptie (versleutelen van informatie) en (d) oplossingen van zoekproblemen. Er is een probleem, het aantal werkende qubits in een computer is nog wat klein, vijf bij IBM op dit moment... (2018).

IBM; Qutech; Qusoft

DIT DIKTAAT gaat over de regels van de kwantum mechanica en over de toepassing daarvan in qubits en de kwantumcomputer. Om over kwantumnatuurkunde te praten, een theorie van na 1900, moet je sommige begrippen van de natuurkunde van voor 1900 (de klassieke natuurkunde) helder definiëren, daarvoor zijn de eerste twee hoofdstukken over klassieke mechanica en trillingen en golven. Een van de redenen waarom mensen kwantummechanica als ingewikkeld betitelen, is omdat de theorie erg wiskundige is. Hoofdstuk 3 over wiskunde helpt je de benodigde aanpak die je in grote lijnen ook bij het vak wiskunde leert. Hoe de kwantummechanica tot stand kwam en wat de vijf regels zijn, daarover gaat hoofdstuk 4. Tot slot, als een soort kers op de taart, legt hoofdstuk 5 uit over de kwamtumcomputer.

1 Klassieke mechanica

1.1 Impuls

De natuurkunde die je nu kent, gaat vaak over de plaats en de beweging van puntvormige voorwerpen en over de invloed van die voorwerpen op elkaar. Deze natuurkunde tot zeg 5vwo noem je de klassieke natuurkunde; dat is in grote lijnen de natuurkunde van Newton die geldt voor puntmassa's.

puntvoorwerp

Een puntvoorwerp bevat alle massa of lading of magnetisme geconcentreerd in één punt met een afmeting van nul.

Om de plaats en beweging goed te beschrijven, heb je meestal maar twee grootheden nodig: $x(t)$ en $v(t)$ en de verandering van de snelheid in de tijd. Omdat de massa m van een puntmassa (meestal) niet verandert, kan het handig zijn om massa toe te voegen met snelheid tot het product mv. Dit product duidt je in de natuurkunde aan als de grootheid impuls:

impuls

$$p = mv. \tag{1.1}$$

Kwantum natuurkundigen koppelen graag impuls en kinetische energie:

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m}. \tag{1.2}$$

HANDIGE APPS
Walter-Fendt.de: Botsingen (html5).
Phet.colorado.edu: Collision lab (java-app).

1.2 Toestand

Om een natuurkundige situatie te bespreken, praat je over de toestand van een systeem. Een toestand is een set van variabelen die een systeem beschrijft *zonder iets te zeggen over het verleden of over de toekomst van dat systeem*. De toestand kun je zien als een soort momentopname of een foto van de set variabelen.

toestand

In de modelomgeving van Coach7 is de toestand de waarde van de grootheden op een bepaald tijdstip.

Hoewel je in de vierde klas leert over een (x,t)-, (v,t)- en (a,t)-diagram voor puntvoorwerpen, gebruiken natuurkundigen graag een diagram waarin ze alle mogelijke toestanden van een systeem kunnen aangeven. Zo'n toestandruimte kan verschillende dimensies en afmetingen hebben. Soms is één getal of één begrip genoeg, soms is het toestanddiagram een twee- of meer-dimensionaal assenstelsel.

toestandruimte

En een toestand is dan een vector in het toestanddiagram.

TE FLAUW is het voorbeeld van munt. De toestanden zijn kop of munt en het toestanddiagram bestaat uit maar twee punten.

EEN COMPUTER-BIT (cbit) kan in de toestand 0 of 1 zijn. De toestanddiagram van één cbit bestaat uit twee punten, maar heb je n cbits dan heb je 2^n punten.

DE TOESTAND van een puntmassa beschrijf je met de grootheden x en p; het toestanddiagram van een puntmassa is dan een (x, p)-diagram. Over een vallend voorwerp kun je zeggen: op een tijdstip $t = 1\,\mathrm{s}$ is de toestand $(p = 3, x = 5)$. Het (x, p)-diagram noem je in de natuurkunde de faseruimte. Iedere mogelijke toestand die de puntmassa kan aannemen, kun je weergeven met een punt in die faseruimte.

faseruimte

TOT SLOT een dwarsfluit. Als je de laagste toon blaast op een dwarsfluit (C4: $f = 262$ Hz) ontstaat er een staande golf in de buis van de dwarsfluit. De grondtoon mag je beschouwen als de grondtoestand van de fluit. Als je nu alle mogelijke boventonen van een dwarsfluit beschouwt, is de toestandruimte van de boventonen een telbare, maar oneindige rij die steeds met eenzelfde stapgrootte toeneemt (262 Hz):
grondtoon (grondtoestand) $f = 262$ Hz;
eerste boventoon ('1ste boventoestand') $f = 524$ Hz;
tweede boventoon ('2de ...) $f = 786$ Hz;
enz.

Benson 2008, p. 99

grondtoestand

HANDIGE APPS
Phet.colorado.edu: Normal Modes: (flash-app).
Phet.colorado.edu: States of matter (java-app).
Walter-Fendt.de: Staande golf longitudinaal (html5).

1.3 Evolutie

Meestal wil je meer weten dan één (x, p)-toestand van een puntmassa of van een systeem; meestal wil je beschrijven hoe een puntmassa van een begintoestand in de tijd gaat naar een volgende toestand. Een natuurkundige evolutiewet beschrijft hoe dat gaat. De evolutiewet vertelt je hoe je een toestand 'update' in de tijd: Welke berekening je moet uitvoeren om te komen van de oude toestand op t_i naar de nieuwe toestand op t_{i+1}. Neem als voorbeeld een vallend voorwerp met een massa van $m = 1$ kg van een hoogte van $x = 20$ m:

evolutie

op $t = 1s$ is de toestand $(x = 15,1\,\mathrm{m};\ p = 9,8\,\mathrm{kg\ m/s})$;

op $t = (1 + 0,1)s$ is de toestand $(x = 14.1\,\mathrm{m};\ p = 10,9\,\mathrm{kg\ m/s})$;

op $t = (1,1 + 0,1)s$ ...

In de modelomgeving van Coach7 is de evolutiewet de manier/berekening waarmee je de toestand voor een volgend tijdstip berekent.

EVOLUTIEWETTEN KOM je in alle gebieden van de natuurkunde tegen. Voor de klassieke natuurkunde geldt dat een evolutiewet deterministisch moet zijn in de tijd. Daarmee bedoel je dat iedere toestand in de fase-ruimte slechts afkomstig is van één toestand uit het verleden en evolueert naar slechts één toestand in de toekomst. In dit verband kom je ook het begrip reversibel tegen: dat wil zeggen dat je naar vorige toestand in de faseruimte kunt terugkeren. Je zou dit kunnen zien als een eis die de klassieke natuurkunde stelt aan een evolutiewet: De wet moet deterministisch zijn.

determinisme

reversibel

klassieke natuurkunde

HANDIGE APPS
Coach7: Dynamisch modelleren = evolueren in de tijd.
Gratis online grafische rekenmachine: Desmos.com.

1.4 Opgaven klassieke mechanica

1. **Impuls**
   Download het PHET collision lab en laat twee dezelfde massa's, zonder wrijving, volledig elastisch botsen.
   a) Bereken voor en na de botsing de totale hoeveelheid impuls.
   b) Laat de massa's een tijdje over de tafel botsen. Wat kun je zeggen over de verandering van de impuls in de tijd, met andere woorden over $^{dp}/_{dt}$?

2. **Telbare toestandruimte**
   a) Beschrijf de toestandruimte van een munt die je gooit.
   b) Idem voor een dobbelsteen.
   c) Teken de toestandruimte van een dwarsfluit
   d) Idem voor computer met 256 klassieke cbits.

3. **Faseruimte**
   Teken faseruimte (x, p) voor een puntmassa die:
   a) Stil staat.
   b) Een ERB uitvoert.
   c) Valt.

4. **Gassen; (pV)-diagram**
   De toestand van een gas kun je weergeven in een (p, V)-toestand-diagram. (Horizontaal p, verticaal: V.)
   a) Teken een (pV)-diagram en geef de assen aan.
   b) Teken een willekeurige toestand van een gas dat in evenwicht is met omgeving. (Toestand T_1)
   Nu ga je het gas – bij constante temperatuur – samenpersen.
   c) Geef aan wat er gebeurt in het (pV)-diagram, en teken het eindpunt (T_2)
   d) Vanuit T_2 ga je – bij vast volume – opwarmen. Teken T_3
   e) Van T_3 laat je vrij uitzetten. Teken T_4.
   f) Tot slot koel je – bij vast volume – weer af tot de oorspronkelijk temperatuur. Teken het laatste punt.

5. **Coach7 Evolutie**
   Maak in Coach 7 een model van een vrije val. Plot de beweging in de faseruimte.
   Kun je het model ook achteruit laten werken? Wat moet je dan veranderen?

6. **Evolutie faseruimte**
   Beschouw de faseruimte van de klassieke mechanica.
   a) Hoe luidt de evolutie-wet van een eenparige rechtlijnige beweging?
   b) Hoe luidt de evolutiewet bij een vrije val?
   c) Leg uit waarom Newtons wet $F = ma$ een evolutiewet is.

7. **Twee toestand systeem**
   Een evolutiewet voor een munt bestaat uit twee regels:

i M $\rightarrow$ K, en

ii K $\rightarrow$ M

a) Leg uit of dit een klassieke evolutiewet is.

b) Geef een voorbeeld van een niet deterministisch verloop van toestanden.

8. **Zes toestanden systeem**

a) Beschrijf de toestand-ruimte van een dobbelsteen.

Een evolutiewet zou kunnen zijn: $1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 1$.

b) Leg uit of dit – klassiek gezien – een acceptabele evolutiewet kan zijn.

c) Leg uit dat de evolutiewet: $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ enzovoort klassiek niet mogelijk is.

Voor een dobbelsteen is een evolutiewet gedefinieerd als: $2 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 2$ enz.

d) Er is hier sprake van een behoudswet; welke 'eigenschap/grootheid' wordt behouden?

e) Kun je nog meer behoudscycli (met behouden grootheid) bedenken?

2 Trillingen en golven

2.1 Harmonische oscillator

De harmonische oscillator (massa-veer-systeem genoemd) keert vaak terug in de kwantummechanica. Daarover heb je onder andere geleerd: **harmonische oscillator**

$$F = -Cu \quad \text{en} \quad E = {}^1\!/\!_2 Cu^2. \tag{2.1}$$

Als je een harmonische oscillator een zetje geeft, gaat deze trillen met een exact bepaalde eigenfrequentie. De eigenfrequentie die hoort bij deze toestand kun je uitrekenen met: **eigenfrequentie**

$$\frac{1}{f} = T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{C}}. \tag{2.2}$$

HANDIGE APPS
st-andrews.ac.uk/physics/quvis/: Classical oscillator a track (html5).
Phet.colorado.edu: Atomic interactions (html5).
Phet.colorado.edu: Resonance (flash).
Phet.colorado.edu: Skate park (html5).

2.2 Eigentoestand

Een golf die je opsluit in een beperkte ruimte blijkt bij heel verschillende frequenties staande golven te kunnen ontwikkelen, bijvoorbeeld bij een dwarsfluit, waarbij de buis twee open uiteinden heeft. In de fluit krijg je staande golven als er een precies aantal halve golflengtes in de buis passen: **staande golf**

$$L = n \times \frac{\lambda}{2} \quad \rightarrow \quad f_n = n \times \frac{v_g}{2L}; \quad \text{met } n = 1, 2, 3, \ldots \tag{2.3}$$

waarbij L de lengte van de buis, λ de golflengte; f_n de eigenfrequentie en v_g de snelheid van het geluid. Je kunt dus (n) eigenfrequenties maken met een dwarsfluit. De laagste frequentie noem je de grondtoon en een hogere frequentie noem je een boventoon. Bij een dwarsfluit is de grondtoon C4 ongeveer $f_1 = 262$ Hz; de eerste boventoon is dan $f_1 = 524$ Hz. Zolang je de lengte van de buis niet verandert, kun je een eigenfrequentie beschouwen als een toestand van de fluit. Met andere woorden: Je kunt de eigenfrequentie ook als een eigen-toestand beschouwen. **eigentoestand**

IN DE ONTWIKKELING van de kwantummechanica, keek de Engelsman Paul Dirac in 1939 opnieuw naar het idee van toestanden. Hij introduceerde voor een toestand een apart symbool: de ket. Een ket is eigenlijk twee haken met een plek ertussen om een aanduiding of naam te noteren: **ket**

$$|\ldots\rangle\,. \tag{2.4}$$

Het getal/woord/symbool tussen de ket-haken is alleen maar een etiket. Dat etiket heeft geen betekenis, het is slechts een aanduiding bedoeld om onderscheid te maken tussen de toestanden. Voorbeelden van kets zijn:

$$|0\rangle; \ |\text{links}\rangle; \ |\text{jan}\rangle; \ |uparrow\rangle \, .$$

Voor een fluit kun je de eigentoestanden noteren als:

$$|GT\rangle; \ |BT1\rangle; \ |BT2\rangle; \ |BT3\rangle; \ |BT4\rangle,$$

of volgens Dirac:

$$|1\rangle; \ |2\rangle; \ |3\rangle; \ |4\rangle; \ |5\rangle.$$

HANDIGE APPS
Walter-Fendt.de: Staande golf uitgelegd (html5).
Walter-Fendt.de: Staande golf longitudinaal (html5).
st-andrews.ac.uk/physics/quvis/: Eigenstates (html5).
Phet.colorado.edu: Normal Modes: (flash-app).

2.3 Superpositie

Niet lineair optellen is bijvoorbeeld: $f = a_1 f_1^2 + a_2 \sqrt{f_2}$.

In 1820 liet de Fransman Joseph Fourier zien dat als je sinusvormige golven met verschillende frequenties (golflengtes) lineair bij elkaar optelt, de som altijd een periodieke functie oplevert:

$$\sum a_n \sin(nx) = \text{periodieke functie}, \tag{2.5}$$

waarbij de amplitude a_n aangeeft hoe sterk een bepaalde sinus in de functie aanwezig is.

superpositie

Lineair optellen noem je superpositie. Onder andere superpositie maakt dat je instrumenten van elkaar kunt onderscheiden: Als je een C4-noot blaast op een dwarsfluit dan hoor je naast de grondtoon ook een combinatie van grond- en boventonen die anders zijn dan als je een C4-noot blaast op een klarinet. Dat kan bij een dwarsfluit bijvoorbeeld met de eigentoestanden:

$$f = a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_n f_n \ldots \tag{2.6}$$

of volgens Dirac:

$$|f\rangle = a_1 |1\rangle + a_2 |2\rangle + a_n |i\rangle \ldots, \tag{2.7}$$

amplitude

waarbij a_n willekeurige getallen zijn die je de amplitude noemt. Je kunt zeggen dat de amplitude weergeeft 'hoe sterk' iedere eigentoestand (eigenfrequentie) aanwezig is in de toon die je hoort.

BEHALVE DAT JE golven kunt optellen tot een nieuwe golf, toonde Fourier ook met omgekeerde aan: Iedere golf is te schrijven als een lineaire superpositie van andere golven:

$$\text{periodieke functie} = \sum a_n \sin(nx). \tag{2.8}$$

HANDIGE APPS

Phet.colorado.edu: Fourier: Making waves (java-app).
Phet.colorado.edu: Normal Modes: (flash-app).
st-andrews.ac.uk/physics/quvis/: Superposition in an infinite well (html5).
st-andrews.ac.uk/physics/quvis/: Expansion of eigenstates (html5).
st-andrews.ac.uk/physics/quvis/: Energy measurements (html5).

2.4 Opgaven trillingen en golven

9. + **Toestand evolutie**
Maak in *Coach7* een model van een harmonische oscillator. Neem $C = 1$ en $m = 1$.
a) Toon de tijddiagrammen: $(u, t); (v, t); (a, t)$, en maak aparte diagrammen van (F, u) en (E, u).
b) Laat in je model ook een diagram zien hoe de massa door de faseruimte beweegt.
Lees over een gedempte harmonische trilling. Daarvoor geldt:
$$ma = -Cu - cv \tag{2.9}$$
c) Verwerk de gedempte trilling in je model.
d) Hoe doorloopt de gedempte trilling de faseruimte?

10. + **Harmonische oscillator**
Beschouw een harmonische oscillator.
a) Op welke plaats is massa het vaakst?
b) Tegen een kans-plaats-diagram met horizontaal $(-A < u < A)$ en verticaal de kans.
Stel dat de massa met een constante snelheid heen-en-weer zou gaan.
c) Hoe ziet het kans-plaats-diagram er dan uit?

11. **Toestandruimte**
Je hebt op een aantal plekken in de natuurkunde toestanden gezien. Maak een tabel voor deze toestand-grootheden waarin je aangeeft: onderwerp / grootheden / toestand-diagram.

12. **Staande en lopende golf**
Kies het juiste antwoord:
a) Bij staande/lopende golven hebben alle punten van de golf dezelfde fase.
b) Bij staande/lopende golven hebben alle punten van de golf dezelfde amplitude.

13. **Staande golf**
Een koord (een los en een vast uiteinde) bevindt zich in de 30-ste aangeslagen toestand. De grondtoestand is $3,5$ Hz.
a) Bereken/bepaal de frequentie van de aangeslagen toestand.
b) Hoeveel knopen zijn er in het koord?

14. **Staande golf 2**
Ga naar Phet lopende golf. Draai net zolang aan de frequentie (vast of los uiteinde maakt niet uit) tot je de grondtoestand in het koord hebt.
a) Bereken de boven-toestanden en zoek deze op door de frequentie van de oscillator aan te passen.
b) Hoeveel boventoestanden passen in het koord? Hangt dit af van de spanning in het koord?
Beschouw een tweezijdig ingeklemd koord.

c) Laat zien dat de golflengtes van staande golven zich gedragen als een wiskundige harmonische reeks.

15. **Superpositie**
Maak op je grafische rekenmachine of op een dynamische calculator staande golven. Doe dit zodanig dat je makkelijk het aantal knopen en buiken kunt variëren en dat je makkelijk lineaire superposities kunt maken.

Google heeft desmos.com

16. **Superpositie 2**
Leg uit waarom je in (2.7) de factor a_n amplitude noemt.

17. **Fourier som**
a) Maak in phet.colorado.edu: Fourier een zaagtand, een blokgolf, een driehoekgolf, en een golfpakketje.
b) Hoe smal kun je de piek maken?
c) Leg uit wat er voor nodig is een oneindig smalle piek te maken.

18. **Fourier som 2**
a) Maak in phet.colorado.edu: Normal modes een aantal superposities met boventonen. Je kunt de boventonen 'meer of minder' luid aanzetten; er zijn oneindig veel superposities te maken.
Je kunt in een tweede tabblad ook twee-dimensionale staande golven maken zoals bijvoorbeeld in het vlies van een trommel.
b) Zoek uit waarop de terminologie $(1, 1), (2, 1)(...)$ duidt.

3 Wiskunde

3.1 Complexe getallen

Definiëer:

$$\sqrt{-1} \equiv i \quad \leftrightarrow \quad -1 \equiv i^2. \tag{3.1}$$

De fijne hiervan is onder andere dat je voortaan de wortel van een negatief getal kunt trekken: $\sqrt{-4} = \pm 2i$.

$i^2 = -1$

We noemen z een complex getal; en schrijven een complex getal z in twee onderdelen: $z = x + iy$. Het reële deel van z is $Re(z) = a$; het imaginaire deel van z is $Im(z) = b$.

complex getal z

complex,imaginair

Van belang voor de natuurkunde is dat je het imaginaire deel van een complex getal niet kunt meten. Je mag zeggen dat echte, tastbare reële meetinstumenten die we kunnen maken, alleen maar reële getallen kunnen meten. Een complex meetinstrument bestaat niet.

Niet bedoelend ingewikkeld.

Complexe getallen leiden naar hele fraaie complexe wiskunde, maar dat is voor je het begrip van de kwamtummechanica op dit moment niet nodig.

3.2 Operator, eigenfunctie en eigenwaarde

Een operator – in de kwantummechanica vaak aangegeven met een hoedje erboven: $\hat{O}$ – verandert een toestand naar een andere toestand; bij evolutie heb je dat al gezien (1.3). De werking van een operator kun je alsvolgt opschrijven:

operator

$$\hat{O}\sigma_1 = \sigma_2, \tag{3.2}$$

waarbij σ_1 de eerste toestand is, en σ_2 de latere toestand.

Wiskundig gezien is een operator bijvoorbeeld een ding dat werkt op een functie:

functie

$$\hat{D} = \frac{d}{dx}, \quad \text{of} \quad \hat{I} = \int_{-a}^{+a} dx.$$

Bijvoorbeeld een operator op de functie $k(x) = \sin(x)$:

$$\hat{D}k(x) = \cos(x) \text{ (een functie)}, \qquad \hat{I}f(x) = 0 \text{ (een getal)}. \tag{3.3}$$

Neem de operator $\hat{D}$ en de twee functies $f(x) = \mathrm{e}^x$ en $g(x) = \mathrm{e}^{2\pi i x/\lambda}$.

$$\hat{D}f(x) = \frac{d}{dx}e^x = 1 \cdot e^x = 1 \cdot f(x), \tag{3.4}$$

$$\hat{D}g(x) = \frac{2\pi i}{\lambda} \cdot e^{2\pi i x/\lambda} = \frac{2\pi i}{\lambda} \cdot g(x). \tag{3.5}$$

We noemen de functies f en g eigenfuncties van de operator $\hat{D}$: De operator beeldt deze twee functies af op zichzelf. In dit geval wordt f exact op zichzelf afgebeeld en wordt g afgebeeld op een waarde van $2\pi i/\lambda$ keer zo

eigenfunctie

eigenwaarde

groot. De waardes 1 en $2\pi i/\lambda$ noemen we de bijbehorende eigenwaardes. De bovenstaande operator $\hat{D}$ heeft als dus eigenfuncties:

$$f(x) \text{ met als eigenwaarde } 1 \tag{3.6}$$

$$g(x) \text{ met als eigenwaarde } \frac{2\pi i}{\lambda}. \tag{3.7}$$

Het zal duidelijk zijn dat de operator $\hat{D}$ nog oneindig veel meer eigenfuncties heeft.

SAMENGEVAT: EEN eigenfunctie f_n van een willekeurige operator $\hat{O}$ voldoet dus aan:

$$\hat{O}\, f_n(x) = o_n\, f_n(x), \tag{3.8}$$

waarbij o_n een eigenwaarde is, een getal. De index $..._n$ geeft aan dat een operator meerdere eigenfuncties en eigenwaardes kan hebben. In woorden staat hier:

$$\text{Operator} \times \text{functie} = \text{getal} \times \text{functie}. \tag{3.9}$$

commutatief

Commutatief wil zeggen: $a \cdot b = b \cdot a$.

TOT SLOT is het handig om te weten dat de meeste operatoren niet commutatief zijn, dat wil zeggen de *volgorde doet er toe*:

$$\hat{x}\,\hat{p}\ (\sigma) \neq \hat{p}\,\hat{x}\ (\sigma). \tag{3.10}$$

Links laat je eerst $\hat{p}$ en dan $\hat{x}$ 'los' op de toestand σ (er staat dus eigenlijk: $\hat{x}\,(\hat{p}(\sigma))$); rechts staat het precies andersom: eerst $\hat{x}$ en dan $\hat{p}$, zie opgaven 23 en 41.

HANDIGE APPS
Phet.colorado.edu: Function builder (html5).

3.3 Vector

vector

Een vector is een ding dat voldoet aan slechts twee eisen:

- Als je twee vectoren lineair bij elkaar optelt (superponeert), krijg je weer een vector:

$$\bar{v} + \bar{w} = \bar{z}. \tag{3.11}$$

- Als je een vector vermenigvuldigt met een getal, krijg je weer een vector:

$$\alpha\bar{v} = \bar{w}. \tag{3.12}$$

Merk op dat deze beide eigenschappen ook gelden voor golven.

eenheidsvector

kolom-vector

Een vector in twee dimensies kun je aan aangeven met twee getallen die zeggen hoe deze vector is opgebouwd uit de eenheidsvectoren $\hat{e}_n$. Dat kan enerzijds als een kolom-vector:

$$\bar{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \bar{v} = 2 \times \hat{e}_x + 3 \times \hat{e}_y; \tag{3.13}$$

rij-vector

en anderzijds als een rij-vector:

$$\bar{v} = (4, 5) \quad \rightarrow \quad \bar{v} = 4 \times \hat{e}_x + 5 \times \hat{e}_y. \tag{3.14}$$

HET INPRODUCT van twee vectoren bereken je als:

inprodukt

$$\bar{v} \cdot \bar{w} = (v_1, v_2) \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = v_1 w_1 + v_2 w_2 = \text{een getal}. \tag{3.15}$$

Let op dat het inproduct van twee vectoren altijd een getal is; en niet een vector. Om de lengte van een vector te krijgen, neem je het inproduct van een vector met zichzelf, dat levert Pythagoras:

Het uitproduct van twee vectoren is een vector: $\bar{v} \times \bar{w} = \bar{x}$.

lengte

$$\|\bar{v}\| = \sqrt{\bar{v} \cdot \bar{v}} = \sqrt{v_1 v_1 + v_2 v_2}. \tag{3.16}$$

EEN GENORMALISEERDE VECTOR is een vector met een lengte van 1. Iedere vector kun je normaliseren door deze te delen voor z'n lengte:

normaliseren

$$\frac{\bar{v}}{\|\bar{v}\|} \tag{3.17}$$

Het inproduct van een eenheidsvector met zichzelf is altijd 1 en het inprodukt met een andere eenheidsvector is altijd nul 0:

$$\hat{e}_x \cdot \hat{e}_x = (1, 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1; \tag{3.18}$$

$$\hat{e}_x \cdot \hat{e}_y = (1, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0. \tag{3.19}$$

Dat een inprodukt nul is, wil zeggen dat vectoren loodrecht op elkaar staan. Anders gezegd: Als vectoren een inproduct van nul hebben, zijn ze onafhankelijk. Dat wil zeggen: Je kunt de ene vector niet opbouwen uit een combinatie (superpositie) van de andere vectoren.

onafhankelijk

HANDIGE APPS
Phet.colorado.edu: Vector addition: (flash-app).
st-andrews.ac.uk/physics/quvis/: Eigen vector (html5).

3.4 Bra-kets en operatoren

Behalve dat Dirac in 1939 een toestand ging schrijven als een ket; stelde hij ook voor om een (kwantum)toestand als een vector te schrijven. In twee dimensies is een toestand (een ket-vector) te noteren als:

$$|v\rangle \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{3.20}$$

Daarnaast benoemde hij de rij-vector een bra-vector:

bra

$$\langle w| \equiv (x, y). \tag{3.21}$$

Ook stelde Dirac voor het inproduct van twee vectoren $\bar{v} \cdot \bar{w}$ te schrijven als:

$$\bar{v} \cdot \bar{w} = \langle v| \cdot |w\rangle \equiv \langle v|w\rangle = \text{getal}. \tag{3.22}$$

Zoals eerder: Een inproduct levert altijd een getal op.

Dirac liet zien dat als je de bra-ket-notatie gebruikt, je heel handig kunt werken. Neem het inproduct van bijvoorbeeld twee eenheidsvectoren en schrijf die eenheidsvectoren als kets, waarbij: $\hat{e}_x = |0\rangle$ en $\hat{e}_y = |1\rangle$ dan volgt (zie 3.18):

$$\hat{e}_x \cdot \hat{e}_x = \langle 0|0\rangle = 1; \tag{3.23}$$

$$\hat{e}_x \cdot \hat{e}_y = \langle 0|1\rangle = 0. \tag{3.24}$$

Maar in feite gaat bovenstaande op voor alle ket-vectoren die loodrecht en genormaliseerd zijn. Als $|\uparrow\rangle$ en $|\downarrow\rangle$ loodrecht en genormaliseerd zijn, dan geldt net als hierboven:

$$\langle\uparrow|\uparrow\rangle = \langle\downarrow|\downarrow\rangle = 1;$$

$$\langle\uparrow|\downarrow\rangle = \langle\downarrow|\uparrow\rangle = 0.$$

operator

Je zou het bovenstaande inproduct ook anders kunnen bekijken. Dirac laat zien is dat een bra-vector een ket-vector omzet naar een getal. Een bra is dus een soort 'operator'.

Als logisch vervolg kun je afvragen wat betekent:

$$|...\rangle\,\langle...| = ...? \tag{3.25}$$

$|...\rangle\,\langle...|$ noem je een operator.

Dat wordt duidelijk als je $|...\rangle\,\langle...|$ vermenigvuldigt met een ket-vector:

$$|\uparrow\rangle\,\langle\downarrow|\cdot|\downarrow\rangle = |\uparrow\rangle\,\langle\downarrow|\,\downarrow\rangle = |\uparrow\rangle \times 1 = |\uparrow\rangle\,. \tag{3.26}$$

De operator $|...\rangle\,\langle...|$ maakt van een ket-vector een andere ket-vector en wiskundig gezien is dit het uitprodukt van een rij-vector en een kolomvector.

kwantum toestand

BRA'S, KETS en operatoren lijken zo opgeschreven een wat rare manier op te schrijven wat je al lang hebt geleerd bij het vak wiskunde. Maar de stap die Dirac maakt, is het inzicht dat je een golf kunt behandelen als een vector en dat je een kwantum-toestand kunt schrijven als een soort golf en dus vector en een ket:

$$|\phi\rangle\,. \tag{3.27}$$

Als je eenmaal wat meer met bra's, kets en operatoren werkt, zul je al snel merken dat je de hele wiskunde van vectoren al snel gaat vergeten. Bra's en kets worden dan abstracte dingen die je makkelijk met elkaar verwerkt.

EEN KORTE samenvatting:

$|...\rangle$ ket-vector;

$\langle...|$ bra-vector; maakt van een ket een getal;

$|...\rangle\langle...|$ operator; maakt van een ket een andere ket.

En tot slot handig:

$$\langle 0|0\rangle = \langle 1|1\rangle = 1; \tag{3.28}$$

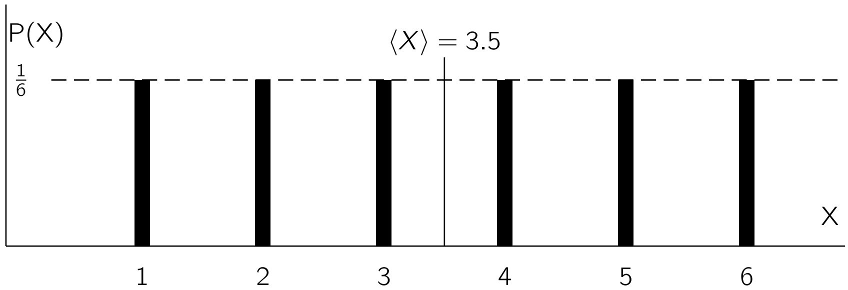
$$\langle 0|1\rangle = \langle 1|0\rangle = 0. \tag{3.29}$$

3.5 Kans(verdeling)

Voor een zuivere dobbelsteen is X het aantal ogen dat je gooit. De kans P dat je één gooit geef je aan als: $P(1) = \frac{1}{6}$ en $P(2) = \frac{1}{6}$ enz... Een kansverdeling geeft aan hoe groot de kans dat je een bepaalde waarde gooit. Het kan erg overzichtelijk zijn om een kansverdeling te tekenen (figuur 3.1).

kans

kansverdeling



Figuur 3.1 – Kansverdeling bij een dobbelsteen. In het midden is de verwachtingswaarde $\langle X \rangle$ aangegeven.

Voor een kans geldt altijd dat de som van alle kansen één moet zijn, geldt altijd, voor ieder toevalsproces geldt:

$$\sum_n P_n = 1. \tag{3.30}$$

DE VERWACHTINGSWAARDE is het theoretisch berekende gemiddelde van alle mogelijkheden:

verwachtingswaarde

$$\langle X \rangle = \sum_n P(x_n) \cdot x_n. \tag{3.31}$$

HANDIGE APPS

st-andrews.ac.uk/physics/quvis/: Block on a track (html5).

st-andrews.ac.uk/physics/quvis/: Classical oscillator a track (html5).

Phet.colorado.edu: Plinko probability (html5).

Australian National University levert gratis Quantum Random Numbers Server (site, live-stream).

3.6 Opgaven wiskunde

19. **Complex getal**
Neem: $z_1 = 2 + 3i$ en $z_2 = 1 - 2i$.
a) Bereken: $z_1 + z_2; z_1 - z_2; z_1 \cdot z_2$.
b) Bewijs: $(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$.

20. **Complex assenstelsel**
Teken een (Re, Im)-assenstelsel. (Is dat hetzelfde als (x, iy)-assenstelsel?)
a) Plaats in je figuur $z_1 = 2 + 3i$; $z_2 1 - 2i$; z_1^*; z_2^*; $z_1 + z_2$; en $z_1 - z_2$.

21. **Eigenfunctie**
a) Zoek enkele eigenfunctie's van de operator $\hat{K} = \frac{d^2}{dx^2}$.
b) Geef ook telkens de eigenwaarde.
c) Toon aan dat de (superpositie) functie $h(x) = \alpha\, f(x) + \beta\, g(x)$ ook een oplossing is van de operator $\hat{K}$.
d) Is $h(x)$ een eigenfunctie van $\hat{K}$?

22. **Eigenwaarde-vergelijking**
Beschouw de operator $\hat{K} = \frac{d^2}{dt^2}$ en de eigenwaardevergelijking (zie 3.8):
$$\hat{K}\, y = k\, y. \tag{3.32}$$
a) Toon aan dat de functies $f(t) = \mathrm{e}^{+3t}$ en $g(t) = \mathrm{e}^{-3t}$ eigenfuncties zijn van de operator $\hat{K}$.
b) Wat zijn de eigenwaardes van f en g?
c) Toon aan dat de lineaire superpositie: $h = 0,56\, f + 0,83\, g$ ook een oplossing is van de eigenwaardevergelijking.

23. **Rotatie: Niet commutatief?**
Leg je mobiel op tafel en definieer de x, y, z assen. Definieer vervolgens:
i) de operator $\hat{X}$ als een rotatie van $+\pi/2$ om de x-as;
ii) de operator $\hat{Z}$ als een rotatie van $+\pi/2$ om de z-as.
Toon aan dat $\hat{X}\,\hat{Z} \neq \hat{Z}\,\hat{X}$.

24. **Vector definitie**
a) Laat zien onder welke voorwaarde de verzameling $\mathbb{Z}$ van gehele getallen vectoren zijn.
b) Leg uit of je de eigenfrequenties van een dwarsfluit als vectoren kunt beschouwen.
c) Laat zien dat de functies: $f(x) = ax$ (met a willekeurig), vectoren zijn.

25. **Inproduct**
a) Toon met een berekening aan dat de vectoren $\binom{1}{1}$ en $\binom{1}{-1}$ loodrecht zijn.
b) Normaliseer beide vectoren.
c) Teken alle vier de vectoren.
d) Wat is het verband tussen enerzijds de eenheidsvectoren $\hat{e}_x$ en $\hat{e}_y$ en anderzijds de twee genormaliseerde vectoren die je zojuist hebt berekend?

26. + **Loodrechte eigentoestand**
Je zag eerder dat het inproduct van verschillende loodrechte vectoren nul is. Dat wil ook zeggen dat je de ene vector niet kunt opbouwen uit andere vectoren: $\hat{e}_z \neq \hat{e}_x + \hat{e}_y$ of iets dergelijks.
Voor de eigentoestanden van een gitaarsnaar geldt dit ook: Alle eigentoestanden van de gitaar zijn loodrecht, waarbij je niet zozeer zegt dat ze loodrecht op elkaar staan, dan wel dat het inproduct van de twee eigenfuncties nul is: Dat je een boventoon niet kunt opbouwen uit andere boventonen. Neem als eigentoestanden van de gitaarsnaar:

$$y_1 = \sin(x); \tag{3.33}$$

$$y_2 = \sin(2x). \tag{3.34}$$

a) Teken beide functies op het domein $[-\pi; +\pi]$
Het inproduct van functies definieer je als:

$$f(x) \cdot g(x) = \int f(x) g(x) dx. \tag{3.35}$$

Dat toegepast op de bovenstaande eigenfuncties:

$$y_1 \cdot y_2 = \int_{-\pi}^{+\pi} \sin(x) \sin(2x) dx. \tag{3.36}$$

b) Toon aan dat bovenstaand inproduct nul is.
c) Leg in woorden uit wat je hebt aangetoond.

27. **Twee cbits**
Je beschikt over een systeem van twee cbits.
a) Geef in ket-notatie de vier mogelijke toestanden van dit systeem.
b) Als je een systeem hebt van vier cbits hebt, hoeveel mogelijke toestanden kan dit systeem aannemen?
c) Kun je een andere aanduiding geven voor de toestand $|0111\rangle$?

28. **Evolutie operator**
Je beschikt over een systeem dat zich in de toestand $|+\rangle$ bevindt. Deze toestand bewerk je met de evolutie-operator $\hat{X}$:

$$\hat{X} = |+\rangle \langle -| + |-\rangle \langle +| . \tag{3.37}$$

a) Geef de toestand na de bewerking.
Wat je zojuist hebt gedaan, is een foton in de $+$richting omdraaien naar de $-$richting.

29. **Toestand evolutie**
Beschouw de toestand-ruimte van een digitale munt: $|0\rangle$ en $|1\rangle$. De begintoestand is $|0\rangle$. Een evolutie-operator kan zijn:

$$\hat{T} = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| \tag{3.38}$$

Toon aan dat deze evolutie-operator leidt to de tijd-serie 010101010...

30. **Toestand evolutie 2**
Een dobbelsteen heeft als toestanden: $|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle, |4\rangle, |5\rangle, |6\rangle$. Een operator voor evolutie kan zijn:

$$\hat{T} = |2\rangle\langle 4| + |4\rangle\langle 6| + |6\rangle\langle 2|. \tag{3.39}$$

a) Bereken de evolutie van toestanden als de begintoestand $|4\rangle$ is.
b) Welke eigenschap wordt behouden?

31. **Verwachtingswaarde**
a) Toon aan dat verwachtingswaarde van een dobbelsteen 3.5 is.
b) Leg uit waarom het woord 'verwachtingswaarde' een misleidend woord is.

32. **Kansverdeling**
Je hebt twee dobbelstenen waarmee je gooit. X is het totale aantal ogen dat je gooit.
a) Maak een theoretisch kans-verdelingsdiagram met op de horizontale het aantal ogen; en verticaal de kans die hoort bij iedere meting.
b) Bereken de verwachtingswaarde.
c) Hoe lang moet je gooien voordat geldt: $x_{\text{gem}} = \langle x\rangle$?
d) Wat kun je zeggen over de vorm van het kans-verdelingsdiagram als je met steeds meer dobbelstenen gaat gooien?

33. **Gauss' functie**
Johann Carl Friedrich Gauss was een Duits wiskundige en werkte rond 1795 aan onder andere de (kansverdelings)-functie:

$$f(x) = e^{-x^2} \tag{3.40}$$

a) Geef een schatting van hoe een (y, x) diagram van Gauss' functie er uit ziet.
b) Plot de functie op je GR of in desmos.
c) Bekijk de functie $f(x) = e^{-(x-4)^2}$. Kun je —zonder berekening— de verwachtingswaarde geven?
d) Leg uit of je het begrip verwachtingswaarde bij deze Gauss-functie, wel/niet vindt passen.
e) Plot deze functie.
Deze functie wordt vaak aangeduid als een normaalverdeling.

34. **Toevalgenerator**
a) Laat je GR tien toevalsgetallen genereren en rond af naar nul of één.
b) Reset je GR, en laat opnieuw een serie genereren. Is het dezelfde reeks?
c) Reset je GR opnieuw en laat weer een serie genereren. Is het dezelfde reeks?
De firma random.org beweren wel random getallen te kunnen leveren. Maar een betere toevalsgenerator is gebaseerd op een kwantum systeem.

Vrij naar Bowman 2008.

35. + **Verwachtingswaarde**

Je meet een grootheid r aan een kwantumsysteem dat maar drie meetuitkomsten kent:

$$r_j = \frac{k}{j^2}(-1)^j, \quad j = 1, 2, 3. \tag{3.41}$$

De kans dat je een bepaalde meetwaarde r_j meet, wordt gegeven door het kwadraat van het getal c_i: $P(r_i) = c_i^2$. Het systeem is voorbereid in een toestand met de amplitudes:

Gepreparereerd.

Uit de complexe wiskunde: $\sqrt{-1} = i$ of $i^2 = -1$.

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{15}}; \qquad c_2 = \sqrt{\frac{5}{15}}; \qquad c_3 = \frac{3i}{\sqrt{15}}. \tag{3.42}$$

Je doet een serie van 75 metingen. Je meet:
6 keer r_1; 22 keer r_2 en 47 keer r_3.
a) Leg uit of je metingen in overeenstemming kunnen zijn met de gegeven waardes.
b) Bereken de verwachtingswaarde van de operator.
c) Bereken gemiddelde waarde van de metingen.

4 Kwantummechanica

De reguliere stof van domein F1 kwamtumwereld bevat al een flink stuk kwantummechanica. In dit diktaat neem ik aan dat je dat al hebt bestudeerd.

4.1 Een kleine samenvatting

Eind negentiende eeuw zijn er in de natuurkunde een aantal experimenten op het atomair niveau waarvan de uitkomsten hardnekkig door de (later genoemd klassieke) natuurkunde niet voorspeld kunnen worden: (a) wat is verklaring van het zwarte-straler-spectrum, (b) waarom kan licht een geladen metaal ontladen, (c) waarom tonen gassen lijnspectra; (d) wat is een elektron en (e) hoe ziet een atoom eruit?

klassieke natuurkunde
zwarte straler
lijnen spectrum
atoom, **elektron**

MAX PLANCK geeft in 1900 een verklaring voor het zwarte-straler-spectrum. Hij laat zien dat straling energie heeft dat uitsluitend afhangt van de frequentie:

$$E = hf \quad \text{met} \quad h = 6.62606957(29) \cdot 10^{-34}\,\text{Js}. \tag{4.1}$$

Albert Einstein maakt in 1904 gebruik van Plancks wet en introduceert het lichtdeeltje (een foton) en verklaart daarmee het foto-elektrisch effect:

foto-elektrisch effect

$$E_{\text{kin}} = hf - W_u. \tag{4.2}$$

Let op dat in de klassieke natuurkunde licht een soort continue golf is. Einstein maakt 'golfpakketjes' van licht.

Ernest Rutherford (1902) en Niels Bohr (1913) komen met een model van het atoom dat de laatste drie onbegrepen experimenten verklaart. Ze beschouwen het atoom als een soort planetenstelsel van elektronen in banen om een kern. Het lukt Bohr om met dat model een beschrijving te geven van de spectrum van waterstof. Elektronen bevinden zich in vast banen met een specifieke – gekwantiseerde – waarde van energie:

Bohr-model

$$E_n = -\frac{13,6}{n^2}\,\text{eV}, \tag{4.3}$$

de banen, aangeduid met n, zijn telbaar en daarmee zijn de energieën gequantiseerd. Een elektron kan naar een andere baan. Dat is alleen mogelijk: (a) omhoog door absorptie van een foton met $\Delta E = hf$, en (b) omlaag door emissie van foton met $\Delta E = hf$. Let dat dat het idee van de energiesprong juist is, blijkt met de verdere ontwikkeling van de kwamtummechanica dat het Bohr-model volstrekt onjuist is.

kwantisering
Bohr-model waterstof.

Op school breid je dit model uit naar het deeltje in een oneindig diepe ééndimensionale put met de energieniveaus (zie opgave 43):

deeltje in doos

$$E_n = \frac{n^2 h^2}{8mL^2}, \tag{4.4}$$

waarbij L de breedte van de put en m de massa van het deeltje.

NU NATUURKUNDIGEN de klassieke problemen eindelijk van zich af schudden, ontstaat er een koortsachtige ontwikkeling van een theorie die in later de *Quantenmechanik* is genoemd.

De Franse prins Louis de Broglie postuleert in 1924 dat een deeltje zich ook kan gedragen als een golf met een golflengte:

$$\lambda = h/p. \tag{4.5}$$

Werner Heisenberg (hij is pas 24 jaar) formuleert in 1924 de eerste kwantumtheorie van spectraallijnen in de vorm van operatoren en eigenwaarden. En paar jaar later verklaren Bohr en Heisenberg het Bohr-model uit 1913 als zijnde dood, er is slechts de uitkomst van de meting geleverd door een operator. 'We weten niet hoe een atoom eruit ziet als we niet kijken.' Heisenberg theorie bevat het onbepaaldheidsprincipe (zie opgave 41):

onbepaaldheid

$$\Delta x \Delta p \geq h/2\pi. \tag{4.6}$$

Omdat Erwin Schrödinger niet tevreden is over de abstracte kansen-theorie van Heisenberg, publiceert bij een beter 'fysisch voorstelbare' theorie gebaseerd op de materie-golven van de Broglie. Schrödinger praat over een golffunctie ψ, (zie opgave 42):

golffunctie

$$\hat{H}\,|\psi(t)\rangle = i\hbar\,\frac{d\,|\psi(t)\rangle}{dt}. \tag{4.7}$$

(Herken je inmiddels de operator, de kets, het complexe getal en de tijdevolutie?) Helaas voor Schrödinger blijkt zijn golffunctie een complex ding te zijn waaraan je niet direct kunt meten. Sterker nog: Max Born laat zien dat Heisenbergs en Schrödingers theorie twee kanten van dezelfde medaille zijn en beide kansen bevatten.

En natuurlijk is er Paul Dirac die de gehele theorie overziend, alles herformuleert in een elegante bra-ket notatiewijze die vooral het rekenen enorm versimpelt. Overigens maakt Dirac in 1928 een grote stap door kwantum te verbinden met de relativiteitstheorie waarmee hij laat zien dat een elektron slechts een aangeslagen toestand is van het gequantiseerde elektronveld.

HOEWEL KWANTUMMECHANICA veel aan atomen meet en rekent, is de theorie niet een atoomtheorie of iets dergelijks. John Gribbin schrijft daarover:

Gribbin 1984, p. 123

> There is no model of what the atom and elementary particles are really like. And nothing tells us what goes on when we are not looking at them. But the equations of quantum mechanics can be used to make predictions on a statistical basis. If we make an observation of a quantum system and get the answer A to our measurement, then the quantum equations tells us what the probablity us of getting answer B (or C or D or whatever) if we make the same observation a certain time later. Quantum theory does not say what atoms are like, or what they are doing when we are not looking at them.

Kwantummechanica is slechts een fundament dat je moet gaan hanteren als je metingen gaat doen aan systemen op atomaire schaal en kleiner, dat kan zijn zijn aan atomen, maar dat kan ook zijn aan licht en aan quarks en strings. De kwantummechanica legt daarnaast het fundament over hoe je tegen zaken als elektrische en magnetische velden moet aankijken: Ook die blijken gekwantiseerd.

Omdat we in ons dagelijkse leven nooit golfgedrag van deeltjes (dingen) meemaken, vragen natuurkundigen zich af hoe groot (of klein) dingen mogen zijn om nog golfgedrag te vertonen. Geldt De Broglie's idee ook voor hele grote dingen zoals een tennisbal? De Oostenrijker Marcus Arndt doet daar in 2011 een proef over. Hij laat moleculen met ongeveer 400 atomen op twee spleten vallen en laat zien dat er inderdaad een interferentie-patroon ontstaat (Gerlich e.a. 2011). Arndt onderstreept met zijn proef opnieuw de vraag die vele natuurkundigen bezighoudt: Is er een afgebakende grens tussen kwantum- en klassiek-gedrag? En zoja bij welke afmetingen dan?

HANDIGE APPS
Over klassieke problemen
Physics flash animations: Thomson's experiment e/m (flash).
Phet.colorado.edu: Zwarte straler (html5).
Phet.colorado.edu: Neon lights and other discharge lamps (html5).
Walter-Fendt.de: Foto-elektrisch effect (html5).
Phet.colorado.edu: Foto-elektrisch effect (java-app).
Phet.colorado.edu: Rutherford scattering (java).

Over het Bohr-model
Walter-Fendt.de: Bohr-model (html5).
Phet.colorado.edu: Models of Hydrogen (java).
Astro.anl.edu: Hydrogen Atom simulator (html5).
Universiteit Toronto Bohr-model waterstof (html5).

Over dualiteit
Walter-Fendt.de: diffractie dubbele spleet (html5).
Walter-Fendt.de: diffractie dubbele spleet (html5).
Phet.colorado.edu: Davisson-Germer: Electron diffraction. (java-app).

4.2 Regels van de kwantummechanica

Nu je wat wiskunde (eigenwaarde) en begrippen (eigentoestand en superpositie) kent, kun je overgaan tot de kern van de kwantummechanica. Ik geef dat hier in de vorm van vijf regels (ook wel de postulaten van de kwantummechanica genoemd).

Vrij naar Bowman 2008.

4.2.1 *Kwantum-regels*

Postulaten, regels, wetten? Een postulaat is het beginpunt van een redenering, kan mevrouw Berendsen zo duidelijk uitleggen. Daarom is een postulaat niet bewijsbaar. Newtons drie wetten kun je opvatten als postulaten, je zou kunnen zeggen dat Newton die wetten 'uit de natuur' heeft gepakt. De wetten zijn niet bewijsbaar, de natuur gedraagt zich toevallig zo en op zijn postulaten is alle verdere klassieke natuurkunde gebouwd. Die wetten mag je ook regels, postulaten of axioma's noemen. (Maar ik weet niet geheel zeker of mevrouw Berendsen dat ook zo ziet.)

kwantumtoestand

Regel 1 *De kwantumtoestand $|\psi\rangle$ bevat alle informatie van een kwantumsysteem.*

We hebben het eerder gehad over de faseruimte waarmee je een klassieksysteem kunt beschrijven: Een punt in de (klassieke) faseruimte vertelt je alles wat je nodig hebt om een klassiek systeem te begrijpen. Het eerste postulaat van de kwantum zegt hetzelfde voor de kwantumtoestand: Er is een soort 'kwantum-faseruimte' waarin je iedere kwantumtoestand kunt weergeven, weet je de kwantumtoestand; dan weet je alles van het kwantumsysteem.

Dat is de Hilbert ruimte: Een oneindig dimensionale complexe ruimte.

Als je terugdenkt aan wat eerder over toestanden is gezegd in paragraaf 1.2, kun je vermoeden dat een kwantumsysteem (bijvoorbeeld het deeltje in een doos opgave 43) waarschijnlijk (a) heel veel verschillende toestanden heeft, (b) dat er zoiets als eigen-(kwantum)toestanden bestaan, en (c) dat er wel weer superpositie zal gaan plaatsvinden. (Allemaal correct.)

Het kwantumsysteem kan een systeem zijn van een deeltje in een doos, een elektron in een twee-spleten experiment, protonen die botsen of sinds een aantal jaar een buckyball (een C-60 molecuul) die door een twee-spleten experiment gaat.

Arndt e.a. 1999, zie nature.

De toevoeging bevat alle informatie beweert dat alles wat je aan het kwantum systeem wil meten, in de kwantumtoestand $|\psi\rangle$ zit opgesloten. De kwantumtoestand is een soort enveloppe waar alle informatie in zit. Anders gezegd: Als je de impuls-operator op de kwantumtoestand laat opereren, krijg je een waarde van de impuls; als je de energie-operator op de kwamtumtoestand loslaat, meet je de energie van het systeem, enzovoort.

Tot slot: Het eerste postulaat is nodig voor de beschrijving van kwantummechanica, maar het eerste postulaat geeft volstrekt geen informatie over wat een kwantum-toestand is. Het eerste postulaat geeft alleen maar aan hoe je een kwantum-systemen kunt bestuderen: Door naar de kwantum-toestandruimte te kijken

Dat doet de onthologie.

Regel 2 *Een grootheid die je kunt meten, heeft de vorm van een operator: $\hat{O}$. Een kwantum-operatoren (een kwantum-grootheid) heeft eigentoestanden en reëele eigenwaarden.*

Wat je eerder zag: bijvoorbeeld de impuls-operator $\hat{p}$ en de energie-operator $\hat{H}$. Volgens dit tweede postulaat voldoet iedere kwantum-operator $\hat{O}$ aan de eigenwaardevergelijking 3.8, hier geschreven met de kwantumtoestand:

$$\hat{O}\,|\psi\rangle = o_n\,|\psi\rangle\,, \tag{4.8}$$

waarbij $|\psi\rangle$ een eigentoestand is van het kwantumsysteem, en o_n een eigenwaarde (een getal). Sommige operatoren hebben discrete (gekwantiseerde) eigenwaarden (de energieoperator); andere operatoren hebben continue eigenwaarden (de impuls-operator).

Regel 3 *Als een kwantum systeem zich bevindt in een eigentoestand* $|\psi_n\rangle$ *van een operator (=grootheid), dan levert meting van die operator, de eigenwaarde die hoort bij de betreffende eigentoestand:*

$$\hat{O}\,|\psi_n\rangle = o_n\,|\psi_n\rangle\,, \tag{4.9}$$

met $\hat{O}$ *een operator en* o_n *een getal.*

Dit postulaat vertelt ons eindelijk wat een meting inhoudt: Een meting van een grootheid levert een eigenwaarde op. Ten minste, als het kwantum-systeem zich in een eigentoestand van een operator bevindt.

Let op dat er hier dus een honderd procent zekerheid is over uitkomst van de meting. Je weet zeker dat als het kwantum-systeem zich in een eigentoestand bevindt, de uitkomst van de meting de eigenwaarde is die hoort bij de eigentoestand van de grootheid (operator).

Regel 4 *Iedere willekeurige toestand van een systeem is te beschrijven als een superpositie van de eigentoestanden van een operator:*

$$|\psi\rangle = \sum a_n \cdot |\psi_n\rangle = a_1\,|\psi_1\rangle + a_2\,|\psi_2\rangle + \ldots \tag{4.10}$$

Meting aan een superpositie levert – met een kans van a_n^2 *– een eigenwaarde* o_n *bij de eigentoestand* $|\psi_n\rangle$*. Direct na een meting bevindt het kwantum-systeem zich in de gemeten eigentoestand.*

Dit postulaat vertelt twee zaken. Allereerst zie je dat je iedere toestand kunt opbouwen uit de eigentoestanden van een operator. Dat lijkt erg op wat Fourier zei over een periodieke functie die je altijd kunt opbouwen uit sinusvormige golven met verschillende frequenties, zie vergelijking 2.6.

Daarnaast vertelt het vierde postulaat wat een meting inhoudt: Het veroorzaakt Bohrs 'instorten van de golffunctie'. De oude complete toestand met alle superposities is verdwenen en de golffunctie bevindt zich in één van de eigentoestanden. Welke dat is weet je van te voren niet, de kwantum kan van te voren alleen maar een kans aangeven bij iedere eigentoestand.

instorten golffunctie

Regel 5 *De Schrödinger-vergelijking 4.31 beschrijft hoe een kwantum-toestand zich ontwikkelt in de tijd.*

Schrödinger-vergelijking

De Schrödinger-vergelijking mag je in zekere zin vergelijken met Newtons evolutiewet $F = ma$. In de Schrödinger-vergelijking zie je een term met d/dt. Dat betekent dat je een nieuwe kwantum-toestand krijgt door de rest van de vergelijking te integreren in de tijd (updaten). In dit diktaat doen we niets met tijdevolutie (zie paragraaf 1.3):

4.2.2 *Voorbeeld met twee-toestanden*

Ga uit van een operator-kwantum-systeem $\hat{O}$ en $|\psi\rangle$ dat twee eigentoestanden heeft en twee verschillende eigenwaarden (de uitkomsten van een meting) (postulaat één en twee):

$$|\uparrow\rangle \text{ met de eigenwaarde } o = +1; \tag{4.11}$$

$$|\downarrow\rangle \text{ met de eigenwaarde } o = -1. \tag{4.12}$$

Een willekeurige superpositie zou kunnen zijn (postulaat vier):

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{4}} |\uparrow\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2} |\downarrow\rangle . \tag{4.13}$$

Het vierde postulaat vertelt ook wat een meting met de operator $\hat{O}$ aan deze superpositie $|\psi\rangle$ oplevert. Je kunt de eigenwaardes meten ± 1 met een kans die gelijk is aan het kwadraat van de amplitude:

$$o = +1 \quad P = \left(\frac{1}{\sqrt{4}}\right)^2 = \frac{1}{4} \quad \text{of} \quad o = -1 \quad P = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}. \tag{4.14}$$

Je ziet hier dat bij de kwantummechanica kans is 'ingebakken'. Voorafgaand aan de meting is de kwantumtoestand een exact omschreven toestand, en door de meting vervalt het systeem naar een eigentoestand. Welke dat is, kun je alleen statistisch aangeven: 25% kans op $|\uparrow\rangle$ en 75% kans op $|\downarrow\rangle$. Hoewel de toestand van het kwantumsysteem in een superpositie is, kun je wel heel precies de verwachtingswaarde aangeven. Volgens vergelijking 3.31:

$$\langle O \rangle = \sum P(o_i) \cdot o_i = \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{3}{4} \cdot -1 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}. \tag{4.15}$$

Samengevat zie je hier de essentie van de kwantummechanica. Kwantum kan heel exact: (a) aangeven hoe een begintoestand $|\psi\rangle$ er uit ziet, (b) aangeven welke uitkomsten gemeten kunnen worden ($o = -1$ en $o = +1$); (c) aangeven hoe groot de kansen zijn dat die waarden gemeten gaan worden (25% en 75%), (d) aangeven wat de verwachtingswaarde is $^1/_2$, en zelfs (e) aangeven hoe de toestand evolueert in de tijd met Schrödingervergelijking. Maar de kwantummechanica kan niet exact aangeven welke waarde bij een individueel experiment gemeten gaat worden.

Nog een opmerking over het laatste deel van het vierde postulaat: Na een meting bevindt het systeem zich in een eigentoestand, of door de meting is de golffunctie ingestort. Uit het voorbeeld:

- Als je meette $o = +1$, dan is nu: $|\psi\rangle = |\uparrow\rangle$;
- Als je meette $o = -1$ dan is nu: $|\psi\rangle = |\uparrow\rangle$.

Stel je meette $o = +1$ en je meet onmiddellijk weer, dan geldt nu het derde postulaat. De toestand na de meting is $|\psi\rangle = 1 \cdot |\uparrow\rangle$ en het derde postulaat geeft nu aan wat je meet:

$$\hat{O} |\psi\rangle = \hat{O} |\uparrow\rangle = +1 \cdot |\uparrow\rangle . \quad \text{Herhaal meting: } o = +1;\ +1;\ +1;\ +1;\ \ldots \tag{4.16}$$

Gelukkig mag je denken, want dit is het kenmerk van een bonafide meting: Bij herhaling meet je steeds dezelfde uitkomst.

HANDIGE APPS

st-andrews.ac.uk/physics/quvis/: Superposition in an infinite well (html5).
st-andrews.ac.uk/physics/quvis/: Expansion of eigenstates (html5).
st-andrews.ac.uk/physics/quvis/: Energy measurements (html5).

4.3 Interpretatie van de regels

De regels van de kwamtummechanica zeggen hoe je berekeningen kunt doen en ze voorspellen je wat de uitkomsten van metingen kunnen zijn. Die voorspellingen blijken telkens weer en in heel veel uitgevoerde experimenten te kloppen. Zoals al eerder gezegd over een theorie: Een goeie theorie voorspelt goed de uitkomsten van metingen. In die zin is de kwamtummechanica dus een goede theorie.

Fysici hebben daarom geen enkele twijfel de berekeningen kloppen of dat de kwantumregels juist zijn. Sterker nog: De kwantummechanica is misschien wel de meest precies geteste theorie die er is, tot ongeveer dertien cijfers.

Dat is het magnetisch moment van een elektron.

De regels doen echter totaal geen uitspraak waarom de kwantummechanica werkt zoals hij werkt, noch wat de regels betekenen of waarom de regels zijn zoals ze zijn, waar de grens tussen kwantum en klassiek gedrag ligt, hoe je de kwantummechanica moet interpreteren enzovoort. Er is dus een groot verschil tussen enerzijds kwantummechanica als rekeninstrument en anderzijds de interpretatie van de kwantummechanica. Sterker nog: Er is veel discussie of kwantummechanica wel het laatste woord is en of er nog stukken ontbreken.

Als je bijvoorbeeld kijkt naar wat er gebeurt tussen het moment van de superpositie en het moment van een meting (vierde postulaat), daar heeft de kwantumechanica (nog) geen antwoord op. De kwantummechanica heeft zelfs geen antwoord op de vraag 'Hoe gaat dat verloop van de superpositie naar eigentoestand?'

Dat bij een meting aan een superpositie deze superpositie spontaan in een eigentoestand vervalt wordt 'instorten van de golffunctie' genoemd.

Maar 'instorten van de golffunctie' geeft totaal geen verklaring voor wat er gebeurt. Als je een meting doet, 'stort de golffunctie in'; maar kan een worm ook naar het kwantum-systeem kijken? En wat gebeurt er als een eencellige 'kijkt' naar het twee-spleten-experiment?

Fysici hebben verschillende antwoorden op het meet-instort-probleem. Bohr zei daarover: 'De meetwaarde is alles wat we weten,' (met andere woorden, maak je niet druk over instorten), en Einstein: 'Er zijn nog verborgen variabelen'. Een grote groep fysici is tegenwoordig van mening dat de kwantumechanica nog niet af is. Er ontbreken nog schakels en daarom kun je niet uitleggen wat er bij een meting aan de hand is.

Schlosshauer, Kofler en Zeilinger 2013

4.4 Kwantummechanica in een notendop

Het experiment en het uitvoeren van een meting is wat kwantummechanica (geformuleerd na 1900) zo onderscheidt van klassieke natuurkunde (de natuurkunde van voor 1900). De kwantummechanica is een theorie die aan de hand van de kwantumtoestand $|\psi\rangle$ voorspelt wat de uitkomst is van een meting aan een systeem van atomaire afmeting.

Afhankelijk van welke grootheid $\hat{O}$ je wilt meten, kun je een kwantumsysteem beschouwen als een superpositie van verschillende eigentoestanden $|\psi_i\rangle$ van de te meten grootheid.

$$|\psi\rangle = \sum a_i \cdot |\psi_i\rangle = a_1 |\psi_1\rangle + a_2 |\psi_2\rangle + \dots \qquad (4.17)$$

Bij meting aan het kwantumsysteem gaat het systeem over naar één van de eigentoestanden $|\psi_i\rangle$ van $\hat{O}$; maar welke dat is weet je niet met zekerheid; je kunt daar alleen maar een statistische uitspraak over doen. De uitkomsten van een meting is de (eigen)waarde die hoort de eigentoestand waarin het systeem verkeert na de meting.

$$\hat{O}\,|\psi_i\rangle = o_i\,|\psi_i\rangle. \tag{4.18}$$

Evolutie in de tijd van een kwantumsysteem bereken je met de Schrödinger-vergelijking:

$$i\frac{h}{2\pi}\frac{d}{dt}|\psi\rangle = H|\psi\rangle. \tag{4.19}$$

Hoewel de regels van de kwantummechanica heel precies kloppen (tot ongeveer 13 decimalen), zijn fysici er nog niet uit of de kwantummechanica het laatste woord is. Albert Einstein vond in ieder geval van niet en ook hedendaagse wetenschappers zijn er nog niet van overtuigd.

4.5 Opgaven kwantummechanica

36. + **UV-catastrofe**

In 1900 rekenen de John William Strutt (Baron Rayleigh) en James Jeans aan de spectrum-curve van een zwarte-straler. Ze zijn gedeeltelijk succesvol met hun voorstel:

$$B(f,T) = \frac{2f^2 k_B T}{c^2}, \tag{4.20}$$

Hierin is B de intensiteit van de straler die afhankelijk is van de variabelen f de frequentie van het uitgezonden licht en T de temperatuur (in K); daarnaast herken je k_B de constante van Boltzmann en c de lichtsnelheid.

a) Plot, bijvoorbeeld in coach 7, de functie (neem $k_B = c = 1$):

$$y_{RJ}(x) = \frac{2x^2 \cdot 1 \cdot T}{1^2} \tag{4.21}$$

Door verschillende T te simuleren, kun je het effect van de temperatuur zien.

Vergelijk de curve van Rayleigh-Jeans met de *vorm* van de curve van het spectrum van de zwarte straler.

b) Bij welk frequentiegebied tonen de curven gelijkenissen?

c) Bij welke frequentiegebied gaat het helemaal mis?

Deze onmogelijkheid om de stralingscurve te kunnen verklaren, raakt berucht als de 'UV-catastrofe.'

d) Leg dit uit.

37. + **Wiens benadering**

In navolging van ideeën van Ludwig Boltzmann en James Maxwell probeert Wilhelm Carl Werner Otto Fritz Franz Wien in 1896 ook een oplossing te vinden voor spectrum-curve van de zwarte straler. Wiens voorstel is:

Voor het gemak is hier $e^x = \exp(x)$.

$$B(f,T) = \frac{2hf^3}{c^2} \exp\left(-\frac{hf}{kT}\right). \tag{4.22}$$

a) Bekijk de term in de exponent: hf/kT. Wat valt je op?

b) Plot, bijvoorbeeld in coach7, Wiens-functie (stel $k_B = h = c = 1$):

$$y_W(x) = \frac{2x^3}{1^2} \exp\left(-\frac{x}{T}\right), \tag{4.23}$$

en simuleer verschillende temperaturen.

c) Leg uit welke verbetering Wiens voorstel laat zien.

d) Is er nog steeds een UV-catastrofe?

38. + **Planck-curve**

Mac Planck hield niet van ad-hoc formuleringen. Een theorie moet opgebouwd vanuit axioma's. Max puzzelde lang aan een verklaring voor het spectrum van de zwarte-straler. Met heel veel tegenzin lukt het Planck om de het spectrum van de zwarte straler te plotten als hij voorlopig aanneemt $E = hf$. Dat wil zeggen dat een bepaalde golflengte (zeg $\lambda = 650$ nm) slechts één bepaalde energie-hoeveelheid kan hebben. (In dit geval

$E = hc/\lambda = ...$ eV. Als Planck die veronderstelling gebruikt, laat hij zien dat de curve van de zwarte-straler voldoet aan:

$$B(f,T) = \frac{2\pi f^3}{c^2}\,\frac{1}{\exp\left(\frac{hf}{k_B T}\right) - 1}. \tag{4.24}$$

a) Plot, bijvoorbeeld in coach 7, Plancks-functie (stel $k_B = h1$):

$$y_P(x) = 2\pi x^3\,\frac{1}{\exp\left(\frac{x}{T}\right) - 1}, \tag{4.25}$$

en simuleer verschillende temperaturen.
b) Vergelijk deze met het spectrum van de zwarte straler. Probleem opgelost?
c) Plot tot slot alle grafieken in dezelfde figuur: Rayleigh-Jeans, Wien en Planck.

39. **spectrum**
In 1885 ontdekken de Zwitser Johann Balmer en Zweed Johannes Rydberg enige regelmaat in het spectrum van waterstof:

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right) \qquad m = 2 \quad n = 3, 4, ... \quad R = 10,973\,\mathrm{m}^{-1}. \tag{4.26}$$

Er is in 1900 geen theorie voor dit verband, noch kan men verklaren waar de grootte van de constante R vandaan komt. Overigens verschijnen er rond 1900 hele handboeken met spectra van de elementen, maar niemand kan ze verklaren.
Als je in de Balmer-Rydberg-formule vergelijking (4.26) invult $m = 2$ en je gebruikt Rydbergs constante $R = 10973731.57\,\mathrm{m}^{-1}$, dan kun je goed de waterstoflijnen uitrekenen.
a) Wat is het verschil tussen een absorptie-, emmissie-, lijn- en een continu-spectrum?
b) Zoek het lijnenspectrum op van waterstof.
c) Bereken met de Balmer-Ryberg-formule om welke waarden van n het gaat bij de waterstof-lijnen.

40. + **Constante van Planck**
Door het fotoelektrisch-effect te onderzoeken, kun je de constante van Planck bepalen. Ga naar/download Colorado Phet: foto-electrisch effect. Het is de bedoeling dat je een grafiek gaat plotten waarin je laat zien hoe E en f van elkaar afhankelijk zijn. De frequentie van de lamp kun je boven instellen. Met de spanning van de batterij kun je elektronen van het oppervlak tegenhouden.
a) Een elektron wordt afgeremd in een elektrisch veld. Welke kant moet het veld gericht zijn?
b) Wat is het verband tussen de energie waarmee de elektronen de linker plaat verlaten en de spanning tussen de platen?
c) Voer nu een aantal metingen uit waarbij je telkens een frequentie of golflengte instelt en je de minimale spanning meet waarbij de elektronen *net* niet meer de overkant bereiken (m.a.w. waarbij $I = 0$).

d) Plot je meetpunten in een (E, f)-grafiek.
e) Hoe bepaal je Planck's constante uit de grafiek?
f) Bepaal de constante van Planck. Geef ook een schatting voor de nauwkeurigheid.

41. **+ Plaats-, impuls-, en tijdoperator**

Vrij naar Polkinghorne 2002.

Het gaat vrij algemeen op dat je formules van de klassieke mechanica kunt omschrijven naar formules van de kwantumechanica door de volgende substituties te maken voor de plaats, impuls en energie:

$\hbar = h/2\pi$ en $\omega = 2\pi/T = 2\pi f$.

$$x \to \hat{x} = x, \tag{4.27}$$

$$p \to \hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}, \tag{4.28}$$

$$E \to \hat{E} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}. \tag{4.29}$$

a) Toon aan dat de functie $\psi(t) = \mathrm{e}^{-i\omega t}$ een eigenfunctie is van de energie-operator. Bepaal de eigenwaarden van de energie-operator. Kun je Planck's formule hieruit destilleren?
b) Toon aan dat de functie $\psi(x) = \mathrm{e}^{2\pi i x/\lambda}$ een eigenfunctie is van de impuls-operator. Bepaal de eigenwaarden van de impuls-operator als die 'opereert' op de functie $\psi(x) = \mathrm{e}^{2\pi i x/\lambda}$. Kun je de Broglie's formule hieruit destilleren?
De commutator is gedefinieerd als:

$$[\hat{a}, \hat{b}] = \hat{a}\hat{b} - \hat{b}\hat{a}. \tag{4.30}$$

(NB: Voor functies niet altijd, maar voor getallen is de commutator 0 nul.)
c) Toon aan dat de twee operatoren $\hat{p}$ en $\hat{x}$ niet commutatief zijn.
d) Wat is de uitkomst van bovenstaande commutator?

Vrij naar: Polkinghorne 2002.

42. **+ Schrödinger-vergelijking**

a) Geef een vergelijking voor de totale energie van een puntmassa.
b) Toon aan dat als de operator voor energie en de operator voor impuls invult, dat je de Schrödinger-vergelijking krijgt:

$\hbar = h/2\pi$

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + E_{\text{pot}}\right). \tag{4.31}$$

De Schrödinger-vergelijking vertelt je hoe de kwantum-toestand in de tijd evolueert (zich in de tijd ontwikkelt). Je laat dan beide kanten van de vergelijking los op de golffunctie $|\psi\rangle$. Bijvoorbeeld de functie:

$$|\psi\rangle = e^{i(2\pi x/\lambda - Ht/\hbar)}. \tag{4.32}$$

c) Toon aan dat deze functie inderdaad een oplossing is.

43. **+ Deeltje in een doos**

In de Schrödinger vergelijking (4.31) duidt je het rechterdeel tussen haakjes als de Hamilton-operator: $\hat{H}$, wat je zou kunnen omschrijven als de totale energie. Voor het deeltje in de oneindig diepe doos luidt de Hamilton-operator:

Hamiltoniaan

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + 0. \tag{4.33}$$

Neem een eigenfunctie die past in de doos met breedte L:

$$|\psi_\mathrm{n}(x)\rangle = A\sin(n\pi x/L). \tag{4.34}$$

Verder geldt voor de eigenfuncties van de energie-operator:

$$\hat{H}\,|\psi_\mathrm{n}(x)\rangle = E_\mathrm{n}\,|\psi_\mathrm{n}(x)\rangle, \tag{4.35}$$

waarbij E_n telkens de bijbehorende eigenwaarde is van iedere eigenfunctie van de operator $\hat{H}$.

a) Teken de golffuncties $|\psi_1\rangle$ en $|\psi_2\rangle$.

b) Teken ook het kwadraat van de golffuncties.

c) Leg uit dat de golffunctie niet de vorm kan hebben als: $|\psi_n\rangle = A\cos(n\pi x/L)$.

d) Toon aan dat met de eigenwaardevergelijking voor de operator $\hat{H}$ en vergelijking 4.33 volgt dat:

Zie bijvoorbeeld NOVA: H12.4 Bemmel en Koopman 2015, p34.

$$E_n = \frac{n^2h^2}{8mL^2}. \tag{4.36}$$

e) Leg in woorden uit wat uitdrukking vergelijking 4.35 doet

f) Welke energiewaardes kan een deeltje aannemen?

44. **Dualiteit**

Maak een 2x2 tabel van waarin je de vier situaties van dualiteit rangschikt.

45. **Eigenwaarde**

Leg uit waarom de eigenwaarden van meetbare grootheden niet complex mogen zijn.

46. **Schrödingers kat**

Zoals je al bij een dwarsfluit ziet, is superpositie niet beperkt tot kwantumsystemen. Erwin Schrödinger stelde in 1935 een gedachte-experiment op met een superpositie van een kat.

Schrödingers kat.

a) Lees het artikel en geef de superpositie van de kat.

b) Leg uit waarom het belangrijk is dat de doos gesloten blijft.

c) Leg uit wat er zinnig en wat er onzinnig is aan dit gedachte-experiment. De Oostenrijkse Markus Arndt maakte een aantal jaar geleden een superpositie met buckyballs.

(Ma e.a. 2012 en Arndt e.a. 1999)

47. **Superpositie meting**

Leg uit hoe postulaat drie volgt uit postulaat vier. (En wellicht geen postulaat is?)

48. **Tweetoestand superpositie**

a) Leg uit waarom bij de superpositie toestand 4.13 geldt: $a_1^2 + a_2^2 = 1$.

b) Bereken de verwachtingswaarden van metingen met operator $\hat{O}$ aan de toestand van 4.13.

49. **Tweetoestand superpositie-2**

Met de apps van Quvis kun je superposities maken en aan simpele eendimensionale putten meten. Achter ieder beginscherm zitten een aantal

opdrachten.
Maak deze opdrachten.

50. + **Kwantum superpositie**

Mijnheer Van Beekum heeft voor z'n robot honderdduizend eendimensionale, oneidig diepe doosjes gekocht (a 1,0101 cent/stuk) met daarin steeds een op dezelfde manier geprepareerd elektron in een superpositie van de toestanden $|E_2\rangle$, $|E_4\rangle$ en $|E_6\rangle$.

Van Beekum vraagt zich af hoe het elektron precies is geprepareerd. Daarvoor doet hij tien metingen waarvan de uitslagen zijn:

$n(E_2) = 1, n(E_4) = 3, n(E_6) = 6.$

Hij concludeert:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{10}|E_2\rangle + \frac{3}{10}|E_4\rangle + \frac{6}{10}|E_6\rangle. \tag{4.37}$$

a) Leg uit wat er fout is aan de opzet van deze meting.

b) Uitgaande van Van Beekums tien metingen, wat zou volgens jou de superpositie zijn?

Onder de indruk van je kennis, vraagt Van Beekum je om de gemiddelde energie van het elektron te berekenen.

c) Leg uit hoe je dat kunt doen.

d) Bereken de gemiddelde energie: $\langle E\rangle$.

Van Beekum is helemaal in z'n sas met jou als talent-leerling. Jij bent echter nog niet tevreden. Je besluit een betere steekproef te nemen en nog 290 doosje te meten:

$n(E_2) = 44, n(E_4) = 102, n(E_6) = 144).$

e) Leg uit of je de metingen van Van Beekum acceptabel vond.

5 Kwantumcomputer

Een klassieke computer rekent met elektrische signalen die 0 (0 Volt) of 1 (5 Volt) zijn en gebruikt daarvoor AND en OR-poorten. Met deze twee poorten als bouwstenen kun je alle computeroperaties uitvoeren; bijvoorbeeld vermenigvuldigen is niets anders dan herhaald optellen wat je met de AND-poort kunt doen. Hoewel niet zo gebruikelijk mag je de toestand van een klassiek computer bit (cbit) noteren in de dirac-notatie als een ket: $|cbit\rangle = |0\rangle$ of $|cbit\rangle = |1\rangle$, zie paragraaf 1.2.

poort
Bijvoorbeeld een wiki: half adder.

cbit

5.1 Qubit

qubit

Een kwantum bit (qubit) is een kwantum systeem met slechts twee eigentoestanden die meestal zijn aangegeven als $|0\rangle$ en $|1\rangle$. Het bijzondere aan een qubit is dat deze in iedere mogelijke superpositie met zichzelf kan verkeren:

$$|qubit\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle\,. \tag{5.1}$$

Wat populair gezegd: Een qubit bevindt zich tegelijk in de toestanden $|0\rangle$ en $|1\rangle$. Het kwamtum-achtige van een qubit is dus dat de toestand van het qubit exact is te omschrijven, maar dat de losse delen van de superpositie niet exacte exact bepaald zijn.

Wiskundig gezien zijn qubits genormaliseerde vectoren, dat wil zeggen :

$$\||qubit\| = \langle qubit|qubit\rangle = 1, \tag{5.2}$$

en meting aan het bovenstaande qubit gebeurt volgens het vierde postulaat en levert:

$$P(|qubit\rangle = |0\rangle) = P(|0\rangle) = \alpha^2, \tag{5.3}$$
$$P(|qubit\rangle = |1\rangle) = P(|1\rangle) = \beta^2. \tag{5.4}$$

HANDIGE APPS
youtube: Feynman on computer heuristics.

5.2 Kwantumcomputer

IBM Charles Bennet over de kwantum-informatie.

Een kwantumcomputer verwerkt digitale informatie via qubits. Het computerbedrijf IBM bouwt er een en dichter bij ook in Delft werken natuurkundigen aan de kwantum-computer. De Universiteiten van Amsterdam en TU Delft proberen samen 's werelds eerste kwantum-internet te bouwen.

quantum lab Delft

kwantumcomputer

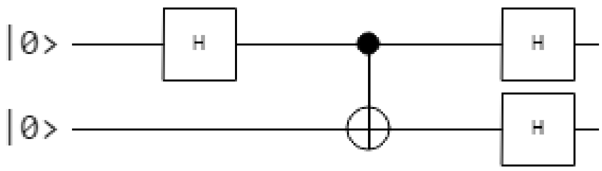
De kwantum-computer maakt gebruik van het feit dat je qubits in superposities met logische kwantumpoorten kunt manipuleren en zolang je niet kijkt of meet de qubits in die verschillende superposities blijfven. Pas als alle operatoren (berekeningen) klaar zijn, doe je een meting en geeft de kwantumcomputer een antwoord.

Niet kijken of meten is echter van cruciaal belang want zodra je kijk (of een worm of een microbe kijkt) treedt postulaat vier in werking: Je ziet/meet nog maar één eigentoestand. Meten stel je daarom uit tot helemaal op het eind van de computermanipulatie.

MANIPULATIE VAN qubits ziet er in z'n algemeenheid ongeveer zo uit:

$$|\psi\rangle = \alpha_0|0\rangle + \beta_0|1\rangle \to \hat{O}_1 \to |\psi\rangle = \alpha_1|0\rangle + \beta_1|1\rangle \to \hat{O}_2 \ldots \quad (5.5)$$

Figuur 5.1 geeft een mogelijk simpel systeem van twee qubits. In figuur 5.1



Figuur 5.1 – Een twee qubit-systeem. Helemaal links de begin-toestanden. Dan twee operatoren die samen een verstrengelaar vormen, tot slot op beide qubit nog een H-operator. In dit schema worden uitsluitend operaties uitgevoerd (aanvankelijk een verstrengeling). Dit algoritme voert nog geen meting uit.

verloopt de tijd in horizontale richting.

- Aanvankelijk is de toestand van beide qubits: $|0\rangle$ zodat je de totale toestand kunt omschrijven als: $|00\rangle$.
- Een $\hat{H}$-operator werkt op de bovenste qubit. De onderste qubit wordt niet bewerkt.
- Een CNOT-operator koppelt de bovenste qubit aan de onderste.
- Op beide qubits werkt een $\hat{H}$-operator.

Een blokje stelt een operator voor. Een blokje noemen we een poort, in dit geval is er drie keer een H-poort en één keer een CNOT-poort. Bijna alle kwantum-poorten hebben de eigenschap dat ze reversibel (deterministisch) zijn in de tijd.))

Het bedrijf D-wave verkoopt kwantumcomputers, maar het bedrijf laat weinig los over de hoe de machine is gemaakt.

Een kwantumsysteem met één qubit kan zich tegelijk in twee toestanden bevinden maar door meer qubits te gebruiken, is er al heel snel heel veel meer mogelijk:

- $|\text{twee qubit}\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|01\rangle + \gamma|10\rangle + \delta|11\rangle$.
- $|\text{drie qubit}\rangle = \alpha|000\rangle + \beta|001\rangle + \gamma|010\rangle + \delta|011\rangle + \ldots$.
- enz.

HANDIGE APPS

Je kunt zelf een account aanmaken op de IBM quantum computer:
https://www.research.ibm.com/ibm-q/

5.3 Kwantumpoorten

Hieronder een lijstje van de meest voorkomende poorten. De meeste kwantumcomputer operaties kun je met onderstaande poorten maken.

5.3.1 *Poorten op één qubit*

I-POORT idle- of identity-poort. Plat gezegd: deze poort verandert niets.

Wikipedia over kwantum poorten.

$$|0\rangle \to |0\rangle\,;\ |1\rangle \to |1\rangle\,,$$

of als bra-ket operator:

$$I = |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|\,. \tag{5.6}$$

X-POORT of NOT-poort. Draait de qubit om:

X

$$|0\rangle \to |1\rangle\,;\ |1\rangle \to |0\rangle \tag{5.7}$$

$$\hat{X} = |1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1|\,. \tag{5.8}$$

Y-POORT. Draait de qubit naar de complex geconjungeerde ($z \to z^*$):

Y

$$|0\rangle \to i\,|1\rangle\,;\ |1\rangle \to -i\,|0\rangle\,, \tag{5.9}$$

$$\hat{Y} = -i\,|0\rangle\langle 1| + i\,|1\rangle\langle 0|\,. \tag{5.10}$$

Z-POORT. Roteert de qubit in de kwantum-toestand-ruimte:

Z

$$|0\rangle \to |0\rangle\,;\ |1\rangle \to -\,|1\rangle\,, \tag{5.11}$$

$$\hat{Z} = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|\,. \tag{5.12}$$

S-POORT. Rotatie de qubit in de kwantum-toestand-ruimte over hoek een willekeurige hoek ϕ (en soms is $\phi = \pi/4$):

S

$$|0\rangle \to |0\rangle\,;\ |1\rangle \to e^{i\phi}\,|1\rangle\,. \tag{5.13}$$

H-POORT of Hadamard-poort. Zet een qubit in superpositie met zichzelf:

H, Hadamard

$$|0\rangle \to \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}};\ |1\rangle \to \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}, \tag{5.14}$$

$$\hat{H} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\,|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| - |1\rangle\langle 1|\Big) \tag{5.15}$$

M-POORT, of meting. Meet een reële eigenwaarde van een qubit. De M-operator is de enige die niet reversibel is die je met andere woorden niet kunt omdraaien, zie postulaat vier. Als je aan een qubit meet, ben je de superpositie kwijt. Omdat de superpositie van het qubit in twee toestand kan terechtkomen, heeft de M-poort twee uitgaande lijnen.

M

5.3.2 *Poort op meer qubits*

CNOT-poort (Controlled-NOT of Conditional-NOT; symbool: $\oplus$) zie de middelste poort in figuur 5.1. Bij de CNOT leest het zwarte bolletje de control-qubit. Als de control-bit een $|0\rangle$ is, dan blijft de andere qubit ongemoeid; maar

CNOT

als de control-bit een $|1\rangle$ is, dan draait de onderste qubit om ($|0\rangle \rightarrow |1\rangle$ of $|1\rangle \rightarrow |0\rangle$). In operator-vorm:

$$CN = |00\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 11| + |11\rangle\langle 10|. \tag{5.16}$$

5.4 Opgaven kwantumcomputer

51. **Cbit**
Zet het binaire getal 11010 om naar een decimaal getal.

52. **Cbit en qubit**
a) Hoeveel cbits heb je nodig om één getal van drie cijfers weer te geven (bijvoorbeeld het getal 999).
b) Hoeveel cbits heb je nodig om duizend getallen van drie cijfers weer te geven? c) Hoeveel qubits heb je nodig om één getal van drie cijfers weer te geven (bijvoorbeeld het getal 999).
d) Hoeveel qubits heb je nodig om duizend getallen van drie cijfers weer te geven?

53. **Qubit, normalisatie**
a) Toon aan dat voor een qubit genormaliseerd geldt: $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.
b) Leg uit waarom $\alpha^2 + \beta^2$ wel 1 moet zijn.

54. **Encryptie**
a) Zoek op internet: *factorisering in priemgetallen* en *encryptie*.
b) Leg uit waarom er momenteel zo'n hectische zoektocht is naar de eerste werkende kwantum-computer.

55. **Qubit meting**
Je voert een meting uit op de qubit:

$$|Q\rangle = {}^{2}\!/\!_{3}|0\rangle - \sqrt{{}^{5}\!/\!_{9}}\beta|1\rangle$$

Wat is de kans dat je toestand $|0\rangle$ meet en wat is de kans dat je toestand $|1\rangle$ meet?

56. **CNOT poort**
Maak een waarheidstabel van een CNOT-poort.

57. **+ Hadamard-poort**
Toon aan dat een H-poort reversibel is. Met andere woorden: Dat twee achter elkaar geplaatste H-poorten hetzelfde doen als een I-poort.

58. **Poort, dirac-notatie**
a) Toon aan dat als je de H-operator schrijft in bra-ket vorm, er inderdaad geldt:

$$\hat{H}\,|0\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}. \tag{5.17}$$

A: b) Voer uit: CNOT $|01\rangle$

59. **+ Verstrengeling**
Een verstrengelde toestand is een toestand van twee (of meer) qubits die in superpositie zijn. Een voorbeeld met twee qubits: is:

verstrengeling
Dit is één van de vier Bell-toestanden.

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|00\rangle + |11\rangle\Big). \tag{5.18}$$

In figuur 5.1 vormen de twee linker poorten (H en CNOT) samen een verstrengelaar.

a) Ga uit van twee qubits die beginnen in een $|00\rangle$ toestand en toon aan dat de verstrengelaar inderdaad toestand 5.18 oplevert.

b) Leg uit wat er gebeurt als je twee verstrengelaars (gespiegeld) achter elkaar plaatst?

c) Bouw in IBM een verstrengelaar en controleer je uitkomsten.

60. + **Verstrengeling 2**

Bohrs idee van instorten van de golffunctie kun je onderzoeken met een verstrengelde toestand. Dat gebeurt in grote lijnen als volgt: Eva verstrengelt (verknoopt, of mengt) twee qubits met elkaar volgens de toestand 5.18. Zonder de qubits te verstoren, stuurt Eva één qubit naar het linker uiteinde van het heelal (naar Alice) en verstuurt ze het andere qubit naar het rechter uiteinde van het heelal (naar Bob).

a) Welke toestanden kan het qubit bij Alice hebben?

b) Welke toestanden kan het qubit bij Bob hebben?

c) Toon aan dat Alice 50% kans heeft op het meten van $|0\rangle$. (En dus 50% op $|1\rangle$)

d) Leg uit wat het vierde postulaat doet met de totale golffunctie (met andere woorden ook bij Bob).

Bob weet niet wat zijn toestand is, het kan $|1\rangle$ of $|0\rangle$ zijn. Bob meet vrijwel direct na Alice. Stel Alice meet $|0\rangle$.

e) Leg uit wat Bob nu meet. Hoe groot is de kans dat Bob deze waarde meet?

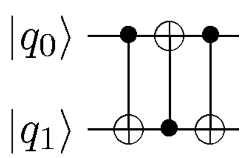
f) Leg uit wat er vreemd is aan deze situatie.

g) Leg uit waarom je verstrengeling niet kunt gebruiken om informatie instantaan – en dus sneller dan het licht – van Alice naar Bob te sturen.

Delftse verstrengeling

61. **Swap-circuit**

a) Toon aan dat een swap-circuit van figuur 5.2 de qubits verwisselt.



Figuur 5.2 – kwantum swap-circuit.

b) Maak het circuit in IBM en controleer je uitkomst.

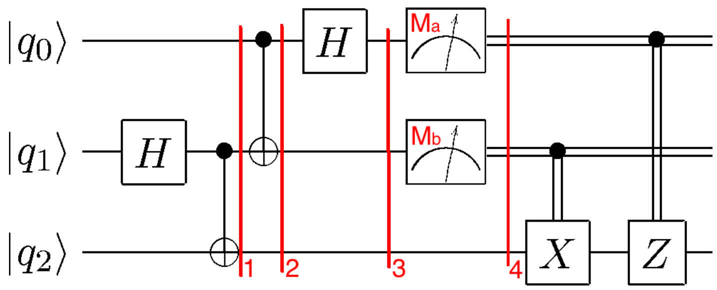
c) Leg uit dat je een qubit in superpositie niet kunt kopieëren.

62. **Kwantum teleportatie**

Overgenomen uit college kwantumfysica van Natk4all.

Kwantum teleportatie tussen de Canarische eilanden (Ma e.a. 2012.

Kwantum teleportatie is een protocol waarbij een qubit wordt overgebracht van een Alice naar Bob en wel zodanig dat de qubit bij Alice verdwijnt en bij Bob tevoorschijn komt. Het idee is voor het eerst in 1993 bedacht en inmiddels uitgevoerd over een afstand van 143 km. In deze opgave zoeken we uit hoe dit werkt.



Figuur 5.3 – Kwantumteleportatie van $|q_0\rangle$.

Het protocol is samengevat in het kwantumcircuit dat hier is weergegeven. We noteren de toestand van het qubit op de bovenste lijn, dat bij Alice dat geteleporteerd gaat worden als: $|q_0\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$.

a) Laat zien dat het protocol gebruik maakt van een verstrengelde toestand op de onderste twee lijnen: $|q_1\rangle$ en $|q_2\rangle$ (Dus voorafgaand aan tijdstip 1).

b) Geef de totale toestand (noem die $|\psi_1\rangle$) van het systeem op t_1.

c) Geef de totale toestand op tijdstip t_3.

Na t_3 vindt een meting plaats van q_0.

d) Wat zijn de uitkomsten van (Ma, Mb)?

Als $M_1 = +1$ dan werkt $\hat{X}$ (5.7) op de onderste lijn en als $M_2 = +1$ dan werkt $\hat{Z}$ (5.11) op de onderste lijn.

f) Bereken de toestand van q_2 na $\hat{X}$ en/of $\hat{Z}$.

g) Leg uit of je dit werkelijk teleportatie vindt.

A Spelers

A.1 Hoofdrolspelers

Figuur A.1 – Ingekleurde foto van de Solvay conferentie in Brussel 1927 op de trappen van het voormalig instituut van fysiologie. Links van het midden de enige vrouw: Marie Curie. Links van haar Max Planck (met hoed); rechts naast haar de pater-familias Hendrik Antoon Lorentz en daarnaast Albert Einstein.

De ontwikkeling van de kwantummechanica is ook een geschiedenis van de hoofdrolspelers. Over hoe ze met elkaar samenwerken, elkaar in de haren vliegen (Heisenberg en Schrödinger) en met elkaar in verbijsterend korte tijd een nieuwe theorie optuigen die het fundament is van alle huidige natuurkunde (klassiek en modern).

Op de foto (A.1) *voorste rij, van links naar rechts*: Irving Langmuir (46), Max Planck (69), Marie Curie (60), Hendrik Antoon Lorentz (74) (werkt in Leiden, Lorentz is een belangrijke reden waarom Einstein naar Leiden komt.), Albert Einstein (48) (tegen Bohr: 'God dobbelt niet.'), Paul Langevin (55), Charles-EugÃÍne Guye (61), Charles Wilson (58), Owen Richardson (48).

Middelste rij, van links naar rechts: Peter Debye (43), Martin Knudsen (56), William Lawrence Bragg (37), Hendrik Anthony Kramers (33), Paul Dirac (25), Arthur Compton (35), Louis de Broglie (35), Max Born (45), Niels Bohr (42) (in antwoord op Einstein: 'Vertel god niet wat hij moet doen').

Bovenste rij, van links naar rechts: Auguste Piccard (43) (Professor Zonnebloem in Kuifje), Emile Henriot (38), Paul Ehrenfest (47) (werkte in Leiden, goede vriend van Albert Einstein), Edouard Herzen (50), Théophile de Donder (55), Erwin Schrödinger (40), Jules Verschaffelt (57), Wolfgang Pauli (27) ('Das ist nicht nur nicht richtig, es ist nicht einmal falsch!', Werner Heisenberg (26), Ralph Fowler (38), Léon Brillouin (38).

Meer over de foto.

OUD MATERIAAL

Zie: Nobel-commissie natuurkunde.

Max Planck (Dui)	1918	na 18 jr
Albert Einstein (Dui)	1921	na 17 jaar
Niels Bohr (Dee)	1922	na 8 jr
Robert Millikan (VS)	1923	na 10 jaar
Arthur Compton (VS)	1927	na 4 jaar
Louis de Broglie (Fra)	1929	na 5 jaar
Werner Heisenberg (Dui)	1932	na 6 jaar
Erwin Schrödinger (Dui)	1933	na 6 jaar
Paul Dirac (Eng)	1933	na 6 jaar
Lester Germer (VS), Clinton Davisson (VS)	1937	na 10 jaar
Edward Stern (Dui)	1943	na 21 jaar
Wolfgang Pauli (Oos)	1945	na 21 jaar
Max Born (Dui)	1954	na 28 jaar

Tabel A.1 – Nobelprijzen natuurkunde voor de grondleggers van de kwantummechanica. Opmerkelijk is dat alle prijswinnaars hier mannen zijn en dat ze hun ontdekkingen deden voor ongeveer hun 45 jaar. Werner Heisenberg was de jongste: Hij deed zijn kwantum-matrixtheorie uit de doeken toen hij 24 jaar was.

Beelden van de Solavy 1927 (youtube, 5min) conferentie.
Interview met Louis de Broglie (youtube 30 min).

B Antwoorden

B.1 Klassieke natuurkunde

1. **Impuls**
   a) en b) $dp/dt = 0$.

2. **Telbare toestandruimte**
   a) Kop $\sigma = \text{K}$ of munt: $\sigma = \text{M}$.
   b) $\sigma = 1$ en $\sigma = 2$ enz.
   c) Een reeks punten: $n \times 262$ Hz.
   d) 2^{256}.

3. **Faseruimte**
   a) Punt.
   b) Horizontale lijn.

4. **Gassen; (pV)-diagram**
   A: Zie wikipedia Carnot-cyclcus.

5. **Coach7 Evolutie**
   Vermoedelijk de startwaarden veranderen en dan $t = t - dt$ doen.

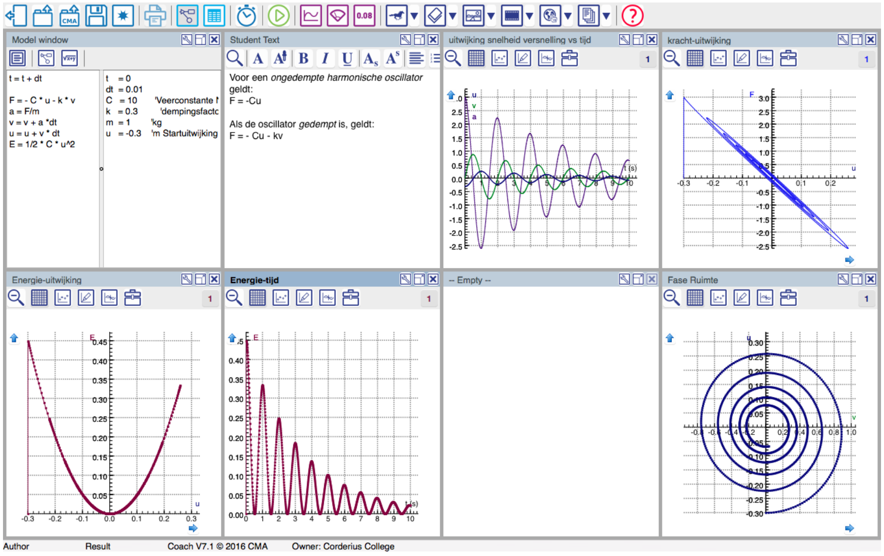
6. **Evolutie; faseruimte**
   a) Denk aan de *Coach7*-regel: $x(t+1) = x(t) + v \cdot dt$ en $v(t+1) = v(t)$
   b) x
   c) $dv = F/mdt$ en $dx = vdt$.

7. **Twee toestand systeem**
   a) Ja. Deterministisch naar toekomst en verleden, in de tijd-reeks ...KM-KMKMKM.... weet je altijd wat de vorige (terug in de tijd) of wat de volgende (vooruit in de tijd) met zijn.
   b) KMKKMMKKKMMMKKKKMMMM, bijvoorbeeld. Als je in toestand M bent, weet je niet welke toestand je ervoor was (dat kan M of K zijn geweest, hangt er vanaf waar je was in de tijd, deze volgorde in niet reversibel) En zo zijn er nog veel meer voorbeelden.

8. **Zes toestanden systeem**
   a) Faseruimte: $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$
   b) Ja zeker! Je kunt vooruit en achteruit in de tijd.
   c) Vanuit toestand 2 weten we niet wat ervoor was.
   d) Evenheid
   e) Onevenheid? en nog veel meer waarbij je deelverzamelingen kunt maken die circulair in elkaar verlopen.

B.2 Trillingen en golven

9. **Toestand evolutie**



Figuur B.1 — Gedempte harmonische oscillator in Coach7.

10. **Harmonische oscillator**
    a) Aan te uiteinden, daar is de snelheid het kleinst.
    b) en c) In Quvis: Classical Oscillator kun je deze proef herhalen.

11. **Toestandruimte**

Onderwerp	Toestand-grootheden	Toestand-ruimte/diagram
muntstuk	bovenzijde	K,M
dobbelsteen	bovenzijde	1,2,3,4,5,6
beweging (van puntmassa's)	plaats, x impuls, p	faseruimte: (x,p)-ruimte
gassen	druk, p Volume, V	(pV)-diagram
staande golven	eigenfrequentie, f	'frequentieladder'

12. **Staande en lopende golf**
    a) Staand.
    b) Lopend.

13. **Staande golf**
    a) ...
    b) 30?

14. **Staande golf 2**
    a)
    b)
    c) wiki geeft wel het antwoord.

15. **Superpositie**

16. **Superpositie 2**
    a_n staat in feite voor hoe luid (amplitude) de betreffende toon aanwezig is.

17. **Fourier som**
    c) Oneindig veel frequenties optellen.

18. **Fourier som 2**
    b) Het aantal halve golflengtes dat past in een richting. Bijv (2,1) in de horizontale richting duidt op $2 \cdot \lambda/2$ in de x-richting en $1 \cdot \lambda/2$ in de y-richting.

Zie Feynman

B.3 Wiskunde

19. **Complex getal**
    a) $3 + i; 1 + 5i; 8 - i$

20. **Complex assenstelsel**
    wellicht.

21. **Eigenfunctie**
    a) Inderdaad oplossen van differentiaal-vergelijking is voor een deel gewoon 'slim gokken'. Bijv: $e^{ax}; \sin(bx); \cos(cx)$.
    b) Bijvoorbeeld: $a^2; -b^2; -c^2$.
    c)
    d) Nee, eigenfuncties zijn orthogonaal (inproduct = nul) en kunnen dus nooit de som zijn van andere eigenfuncties.

22. **Eigenwaarde-vergelijking**
    a) Tweemaal differentieëren naar t.
    b) Beide: 9.
    c) $\hat{K}h = \hat{K}(c_1 f + c_2 g) = c_1 \hat{K} f + c_2 \hat{K} g = c_1 9f + c_2 9g = 9(c_1 f + c_2 g) = 9h$ En neem $c_1 = 0,56$ en $c_2 = 0,83$.

23. **Rotatie: Niet commutatief?**
    kwestie van doen en (a) goed assen en draairichtingen definiëren.

24. **Vector definitie**
    a) i) getal + getal = getal en getal x getal = getal.
    b) Zie a: je kunt ze i) optellen en ii) vermenigvuldigen, en beide operaties leveren bestaande frequnties op.

c) i en ii inéén: $af(x) + bg(x) = h(x)$

25. **Inproduct**
 a) inproduct = 0.
 b) $\frac{1}{\sqrt{2}}\binom{1}{\pm 1}$
 d) Het gaat om een rotatie van $\pi/4$.

26. **+ Loodrechte eigentoestanden**
 b) A: Gebruik: $\sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x)$.

$$
\begin{aligned}
y_1 \cdot y_2 &= \int_{-\pi}^{+\pi} \sin(x)\ \sin(2x) dx = \int_{-\pi}^{+\pi} \sin(x) 2\ \sin(x)\cos(x) dx \\
&= -2\int_{-\pi}^{+\pi} \sin^2(x) d\sin(x) = -{}^2\!/_3 \sin^3(x)\Big|_{-\pi}^{+\pi} = 0
\end{aligned}
$$

 c) y_1 en y_2 hebben een inproduct van nul, maw: de twee functies zijn orthogonaal; je kunt de boventonen niet uit elkaar opbouwen.

27. **Twee cbits**
 a) $|00\rangle$; $|01\rangle$; $|10\rangle$; $|11\rangle$
 b) 2^8 bijv: $|00000001\rangle$; $|0000010\rangle$ enz.
 c) $|7\rangle$. binair naar decimaal omzetting.

28. **Evolutie operator**
 a)

$$
\begin{aligned}
\hat{X}\ |+\rangle &= \{|+\rangle\langle-|\ +\ |-\rangle\langle+|\}\ |+\rangle\,, \\
&= |+\rangle\langle-|\,|+\rangle\ +\ |-\rangle\langle+|\,|+\rangle\,, \\
&= |+\rangle\ \langle-|+\rangle\ +\ |-\rangle\ \langle+|+\rangle\,, \\
&= |+\rangle \times 0\ +\ |-\rangle \times 1 = |-\rangle\,.
\end{aligned}
$$

29. **Toestand evolutie**
 a)

$$
\begin{aligned}
\hat{T}\ |0\rangle &= (|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|)\cdot|0\rangle\,, \\
&= |0\rangle\ \langle 1|0\rangle + |1\rangle\ \langle 0|0\rangle\,, \\
&= |0\rangle\ 0 + |1\rangle\ 1 = |1\rangle\,. \\
\hat{T}\ |1\rangle &= (|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|)\cdot|1\rangle\,, \\
&= |0\rangle\ \langle 1|\,ket1 + |1\rangle\ \langle 0|1\rangle\,, \\
&= |0\rangle\ 1 + |1\rangle\ 0 = |0\rangle\,.
\end{aligned}
$$

30. **Toestand evolutie 2**
 a) Zie de vorige opgave voor gebruik van $\hat{T}$. Dat levert op:

$$
\begin{aligned}
\hat{T}\,|4\rangle &= (|2\rangle\langle 4| + |4\rangle\langle 6| + |6\rangle\langle 2|)\,|4\rangle, \\
&= |2\rangle\langle 4|4\rangle + |4\rangle\langle 6|4\rangle + |6\rangle\langle 2|4\rangle \\
&= 1|2\rangle + 0|4\rangle + 0|6\rangle = |2\rangle
\end{aligned}
$$

426426426...
b) Evenheid: $d(\text{evenheid})/dt = 0$.

31. **Verwachtingswaarde**
a) $\langle x\rangle = \frac{1}{6}\cdot 1 + \frac{1}{6}\cdot 2 + ... = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = \frac{21}{6} = 3,5$
b) In dit geval levert één individuele meting nooit de verwachtingswaarde.

32. **Kansverdeling**
b)

$$\langle x\rangle = \sum_{n=1}^{10} x_n \cdot P(x_n) = \frac{1}{36}\cdot 2 + \frac{2}{36}\cdot 3 + \frac{3}{36}\cdot 4 \ldots =$$

c) $n = \infty$
d) Vorm blijft gelijk, maar schuift steeds dichter in elkaar.

33. **Gauss' functie**
a) $-x^2$ blijft altijd een negatief geval en $e^0 = 1$ is de maximum waarde dus blijft de functie altijd onder 1.
c) $\langle X\rangle = 4$.
d) Wel: De verwachtingswaarde zou je kunnen meten.

34. **Toevalgenerator**
b) Nee, waarschijnlijk.
c) Ja waarschijnlijk.

35. + **Verwachtingswaarde**
a) $75/15 = 5; 5\cdot 75/15 = 25$ en $9\cdot 75/15 = 45$.
Dat lijkt redelijk overeen te stemmen met de geprepareerde toestand.
b)

$$\langle \hat{r}\rangle = k\left(\frac{1}{15}\frac{1}{1}\cdot -1 + \frac{5}{15}\frac{1}{4}\cdot 1 + \frac{9}{15}\frac{1}{9}\cdot -1\right) = \frac{13}{60}\cdot k = -0,067\,k$$

...volgens mij.
c)

$$\langle r_{\text{gemeten}}\rangle = k\left(\frac{6}{75}\frac{1}{1}\cdot -1 + \frac{22}{75}\frac{1}{4}\cdot 1 + \frac{47}{75}\frac{1}{9}\cdot -1\right) = -\frac{5,8}{75}\cdot k = -0,076\,k.$$

Maar ergens zit een rekenfoutje zegt mijn gevoel. Een mars als je 'm vindt.

B.4 Kwantummechanica

36. + **UV-catastrofe**
b) Lage frequentie/lange golflengtes
c) Hoge frequenties/korte golflengtes
d) UV = korte golflengte.

37. + **Wiens benadering**

b) $(E =)hf$ is bekend als Planks idee... c) 'Klok'-curve
d) Nee.

38. + **Planck-curve**
a)
b) Ja. Behalve dan dat Planck er nu mee zat dat hij niet kon uitleggen waar $E = hf$ vandaan kwam, deze aanname was net zo goed ad-hoc. Planck hoopte dat als het probleem van de zwarte-straler beter begrepen zou gaan worden.

39. **spectrum**
a) Continu = zwarte straler; emissie = lijn = ijl en heet gas; absorptie = hete zwarte straler dat continu spectrum uitzendt, maar koeler ijl gassen tussen zwarte straler en waarnemer. Koeler ijl gas neem energie van de zwarte straler op en zendt die alle richtingen weer uit. Derhalve voor waarnemer nu donkere banden (omgekeerde van het lijnen-spectrum).
c) Zie de Balmer-series.

40. + **Constante van Planck**
a) Veld moet naar links gericht.
b) A: $E_k = -qU$.
c)
d) Zoiets: Millikan Nobel prijs college
e) h = helling in de grafiek
f) Let op eV en Joule.

41. + **Plaats-, impuls-, en tijdoperator**
a) $E = hf$
b) $p = h\lambda$
d) A: $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$. (Lijkt dit niet verdacht veel op Heisenbergs onbepaaldheid?)

42. + **Schrödinger-vergelijking**
a) De totale energie van een deeltje is meestal de som van de kinetische- en de potentiële energie:

$$E_{\text{tot}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}mv^2 + E_{\text{pot}} = \frac{p^2}{2m} + E_{\text{pot}}. \tag{B.1}$$

c) Dat is weer een kwestie van precies differentiëren en gebruik maken van de Broglie $p = h/\lambda$:

$$\begin{aligned}
-i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle &= \frac{i\hbar i H}{\hbar}e^{i(2\pi x/\lambda - Ht/\hbar)} = H|\psi\rangle , \\
-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}|\psi\rangle &= -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial}{\partial x}(2i\pi/\lambda)e^{i(2\pi x/\lambda - Ht/\hbar)} \\
&= -\frac{h^2}{4\pi^2\cdot 2m}(4i^2\pi^2/\lambda^2)e^{i(2\pi x/\lambda - Ht/\hbar)} \\
&= -1\cdot i^2\frac{h^2}{2m\lambda^2}|\psi\rangle = \frac{p^2}{2m}|\psi\rangle .
\end{aligned}$$

Wat hier staat is: $\hat{H}\,|psi\rangle = E\,|psi\rangle$, kennelijk zijn E de eigenwaardes van $\hat{H}$; en als je kunt uitschrijven $E_k = p^2/2m$, met andere woorden een vorm van kinetische energie.

43. **+ Deeltje in een doos**

d)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\psi_n(x) &= A\frac{\pi n}{L}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \\ \frac{d^2}{dx^2}\psi_n(x) &= -A\frac{\pi^2 n^2}{L^2}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = -\frac{\pi^2 n^2}{L^2}\psi_n(x) \\ -\frac{\hbar^2}{2m}\times -\frac{\pi^2 n^2}{L^2}\psi_n(x) &= E_n\psi_n(x) \\ \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\pi^2 n^2}{L^2} &= E_n \;\rightarrow\; E_n = \frac{n^2 h^2}{8mL^2}. \end{aligned}$$

e) Meting van $\hat{H}$ aan de toestand $|\psi_\mathrm{n}(x)\rangle$ levert de eigenwaardes van de operator: In dit geval de waardes die $\hat{H}$ kan aannemen.

f) $E = \alpha E_1 + \beta E_2 + ...$

44. **Dualiteit**

	deeltje-gedrag	golf-gedrag
massa	klassiek $E = \frac{1}{2}mv^2$ $p = mv$	kwantum $\lambda = h/p$
straling	kwantum $E = hf$ $p = E/c$	klassiek $\lambda = c/f$

Tabel B.1 – Massa en ook straling gedragen zich soms als deeltje; soms als golf: Dualiteit.

45. **Eigenwaarde**

Uitkomsten van metingen moet reëel zijn; complexe getallen kun je niet meten (Alleen maar abstract mee rekenen).

46. **Schrödingers kat**

a) $|\mathrm{kat}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|\mathrm{dood}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|\mathrm{leven}\rangle$

b) Zodra er interactie is met de omgeving, vindt een meting plaats. Dan vervalt de kat in één van beide toestanden.

c)

47. **Superpositie meting**

Als de toestand een eigentoestand $|\psi_1\rangle$ is, is er geen superpositie. Met andere woorden: $a_i = 1$. Meting van de operator levert nu o_i met een kans van 1^2. Met andere woorden: Je meet in honderd procent van de metingen aan dit de waarde $O = o_i$.

48. **Tweetoestand superpositie**
a) A: $P(O=+1)+P(O=-1)=1$.
b) $\langle O\rangle = \frac{1}{4}\cdot 1+\frac{3}{4}\cdot -1 = -\frac{1}{2}$

49. **Tweetoestand superpositie 2**
Met de apps van Quvis kun je superposities maken en aan simpele een-dimensionale putten meten.Achter ieder beginscherm zitten een aantal opdrachten.
Maak deze opdrachten.

50. **Kwantum superpositie**
a) Veel te weinig metingen om te kunnen concluderen. De sample-size zou groter moet zijn. (Hoe groot dat vertelt de statistiek je.)
b) kans = a_i^2, dus:

$$|\psi\rangle = 0,316\,|E_2\rangle + 0,548\,|E_4\rangle + 0,775\,|E_6\rangle.$$

c) Er geldt: $E_n = n^2h^2/8mL^2$. Het gemiddelde is de som van de energie van iedere toestand vermenigvuldigd met de kans.
d)

$$\begin{aligned}\langle E\rangle &= a_2^2\,E_2 + a_4^2\,E_4 + a_6^2\,E_6\\ &= \frac{h^2}{8m_eL^2}\left(\frac{1}{10}2^2+\frac{3}{10}4^2+\frac{6}{10}6^2\right)\\ &= 3,350\,\frac{h^2}{m_eL^2}\end{aligned}$$

e) Jij meet: $44/290 = 0,152;\quad 102/290 = 0,352;\quad 144/299 = 0,497.$
bijna 50% fout bij Van Beekum. Conclusie: Hij snapt het nog niet.

B.5 Kwantumcomputer

51. **Cbit**
$1\cdot 2^4+1\cdot 2^3+0\cdot 2^2+1\cdot 2^1+0\cdot 2^0 = 16+8+2 = 26$

52. **Cbit en qubit**
a) Met 10 bits kun je tot $2^{10}=1024$ tellen.
b) $1000\times 10 = 10.000$ cbits.
c) Weer 10 qubits.
d) 10 qubits. Alle superposities zijn tegelijk mogelijk.

53. **Qubit, normalisatie**
a)
b) Kans op een uitkomst moet 1 zijn.

54. **Encryptie**

55. **Qubit meting**
4/9 en 5/9.

56. **CNOT poort**
zie wikipedia: CNOT.

57. **Hadamard-poort**

$$
\begin{aligned}
\hat{H}\hat{H} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|\right)\cdot \\
&\quad \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|\right), \\
&= \frac{1}{2}\left(2\,|0\rangle\langle 0| + 2\,|1\rangle\langle 1|\right), \\
&= |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|, \\
&= I.
\end{aligned}
$$

Overigens geldt voor alle kwantum-poorten $\hat{O}$ (op de meting na):

$$\hat{O}\hat{O} = I. \tag{B.2}$$

58. **Poort, dirac-notatie**
a)

$$
\begin{aligned}
\hat{H}\,|0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\,|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| - |1\rangle\langle 1|\Big)\,|0\rangle\,, \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\,|0\rangle\cdot 1 + |1\rangle\cdot 1\Big) + 0 + 0, \\
&= \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
CN\,|01\rangle &= \big(\,|00\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 11| + |11\rangle\langle 10|\Big)\,|01\rangle\,, && \text{(B.3)} \\
&= 0 + |01\rangle + 0 + 0 = |01\rangle && \text{(B.4)}
\end{aligned}
$$

59. **+ Verstrengeling**
a) ga uit van: t_0 is de aanvangstoestand; t_1 de toestand na de H-poort; t_2 de toestand na de CNOT-poort.

$$
\begin{aligned}
t_0: &\quad |\psi\rangle = |00\rangle, \\
t_1: &\quad |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle, \\
t_2: &\quad |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle.
\end{aligned}
$$

of:

$$
\begin{aligned}
t_0: \quad & |\psi\rangle = |00\rangle, \\
t_1: \quad & |\psi\rangle = H|00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| - |1\rangle\langle 1| \Big)|00\rangle \\
& = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|00\rangle + |10\rangle\Big), \\
t_2: \quad & |\psi\rangle = CNOT\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|00\rangle + |10\rangle\Big) \\
& = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|00\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 11| + |11\rangle\langle 10|\Big)\Big(|00\rangle + |10\rangle\Big) \\
& = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|0\rangle + |1\rangle \Big)\ |0\rangle \\
& = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|00\rangle + |10\rangle\Big).
\end{aligned}
$$

b) Alle poorten, behalve de meetpoorten, zijn reversibel:

$$\hat{H}\,\mathrm{CNOT}\,\mathrm{CNOT}\,\hat{H} = \hat{H}\,1\,\hat{H} = I$$

c) -

60. +**Verstrengeling 2**

a) $|00\rangle$ of $|11\rangle$.
b) $|00\rangle$ of $|11\rangle$.
c) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 0,5$
d) Instorten van de golffunctie.
e) $|11\rangle$, 100%.
f) Aanvankelijk was Bob's situatie onbepaald: 50-50 op het meten van 00 of 11. Echter door Alice' meting (heel ver weg in het heelal) is de situatie nu vastgelegd. Zodra Alice een meting uitvoert, stort de golffunctie in en bepaalt zij ook voor Bob wat hij gaat meten. Maar door de enorme afstanden is het onmogelijk dat de twee qubits met elkaar communiceren.
g) Alice kan niet beslissen wat ze gaat meten. Voor Alice is het een toeval welke toestand zij meet. Met andere woorden: Zij kan niet van te voren bedenken hoe haar te versturen informatie er gaat uit zien. (Als ze het getal 5=101 wil versturen, dan moeten ze van te voren vastleggen hoe de bits eruit zien. Superpositie is dus verbroken en daarmee is verstrengeling ook verbroken.)
Kennelijk zijn de twee verstrengelde qubits, ook al bevinden ze zich aan de uitersten van het heelal, blijvend aan elkaar gekoppeld totdat er wordt gemeten. Dit experiment wordt op kleine schaal uitgevoerd. Eerst in 1983 door de fransman Alain Aspect, maar recenter door onder andere een groep van Nederlandse onderzoekers in Delft.

Delftse Bell test.

61. **Swap-circuit**

a) –
b) –
c) –

62. + **Kwantumteleportatie**

a) Zie de opgave over verstrengeling.

b)

$$
\begin{aligned}
|q_0\rangle &= \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle \quad \wedge \quad |q_1q_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle + |11\rangle\right);\\
|\psi_1\rangle &= |q_0\rangle \otimes |\psi\rangle = \left(\alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle\right) \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle + |11\rangle\right)\right)\\
&= \frac{\alpha}{\sqrt{2}}|000\rangle + \frac{\alpha}{\sqrt{2}}|011\rangle + \frac{\beta}{\sqrt{2}}|100\rangle + \frac{\beta}{\sqrt{2}}|111\rangle.
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
t_0 \quad |\psi_0\rangle =& |000\rangle,\\
t_1 \quad |\psi_1\rangle =& \frac{\alpha}{\sqrt{2}}|000\rangle + \frac{\alpha}{\sqrt{2}}|011\rangle + \frac{\beta}{\sqrt{2}}|100\rangle + \frac{\beta}{\sqrt{2}}|111\rangle,\\
t_2 \quad |\psi_2\rangle =& \frac{\alpha}{\sqrt{2}}|000\rangle + \frac{\alpha}{\sqrt{2}}|011\rangle + \frac{\beta}{\sqrt{2}}|110\rangle + \frac{\beta}{\sqrt{2}}|101\rangle,\\
t_3 \quad |\psi_3\rangle =& \frac{\alpha}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|1\rangle\right)|00\rangle +\\
& \frac{\alpha}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|1\rangle\right)|11\rangle +\\
& \frac{\beta}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\,|1\rangle\right)|10\rangle +\\
& \frac{\beta}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\,|1\rangle\right)|01\rangle +\\
=& \frac{\alpha}{2}\left(|000\rangle + |100\rangle + |011\rangle + |111\rangle\right) +\\
& \frac{\beta}{2}\left(|010\rangle - |110\rangle + |001\rangle - |101\rangle\right).
\end{aligned}
$$

d) $(0,0); (0,1); (1,0); (1,1)$

$$
\begin{aligned}
&P(0,0) = \frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4} = \frac{1}{4}(\alpha^2 + \beta^2) = \frac{1}{4}\cdot 1 = \frac{1}{4};\\
&P(0,1) = P(1,0) = P(1,1) = \text{idem}.
\end{aligned}
$$

Met andere woorden: omdat alle toestanden gelijke kansen hebben, is niet meer terug te rekenen wat de toestand van q_0 was voorafgaand aan de meting (=WFC). Het oorspronkelijke qubit $|q_0\rangle$ bestaat niet meer!

Als $M_1 = +1$ dan werkt $\hat{X}$ (5.7) op de onderste lijn en als $M_2 = +1$ dan werkt $\hat{Z}$ (5.11) op de onderste lijn.

f) Mogelijke combinaties:

(M_0, M_1) : $(-1,-1)$; $(-1,+1)$; $(+1,-1)$; $(+1,+1)$. Alleen q_2 is nog over, immers WFC van q_0 en q_1.

$$
\begin{aligned}
& & t_3 \quad |\psi_3\rangle =& \frac{\alpha}{2}\left(|000\rangle + |100\rangle + |011\rangle + |111\rangle\right) + \\
& & & \frac{\beta}{2}\left(|010\rangle - |110\rangle + |001\rangle - |101\rangle\right), \\
t_4 \quad & M_{0,1} = (-1,-1) & |\psi_4\rangle =& \frac{\alpha}{2}|0\rangle + \frac{\beta}{2}|1\rangle, \quad \text{term 1 en 7}, \\
& M_{0,1} = (-1,+1) & |\psi_4\rangle =& \frac{\alpha}{2}|0\rangle + \frac{\beta}{2}|1\rangle, \quad \text{term 3, 5, en } \hat{X}|q_2\rangle, \\
& M_{0,1} = (+1,-1) & |\psi_4\rangle =& \frac{\alpha}{2}|0\rangle + \frac{\beta}{2}|1\rangle, \quad \text{term 2, 8, en } \hat{Z}|q_2\rangle, \\
& M_{0,1} = (+1,+1) & |\psi_4\rangle =& \frac{\alpha}{2}|0\rangle + \frac{\beta}{2}|1\rangle, \quad \text{term 4, 6, en } \hat{Z}\hat{X}|q_2\rangle.
\end{aligned}
$$

En lijkt – op de factor 1/2 na dan, precies op q_0 van Alice.
g) Er wordt alleen maar informatie overgebracht; niet atomen zelf.

Literatuur

Arndt, M. e.a. (1999). „Wave-particle duality of C60 molecules". In: *Nature* 401, p. 680–682. doi: 10.1038/44348.

Bemmel, H. van en L. Koopman (2015). *Nova, natuurkunde*. vwo6. Malmberg, 's Hertogenbosch.

Benson, D. (2008). *Music: A Mathematical Offering*. web. url: http://homepages.abdn.ac.uk/mth192/pages/html/maths-music.html.

Bowman, G. E. (2008). *Essential Quantum Mechanics*. Oxford: University press.

Gerlich, Stefan e.a. (2011). „Quantum interference of large organic molecules". In: *Nature Communications* 2, p. 263. issn: 2041-1723. doi: 10.1038/ncomms1263. url: http://www.nature.com/doifinder/10.1038/ncomms1263 (bezocht op 08-12-2016).

Gribbin, J. (1984). *In Search of Schrodingers cat Quantum Physics and reality*. New York: Bantam Book.

Ma, Xiao-Song e.a. (2012). „Quantum teleportation over 143 kilometres using active feed-forward". In: *Nature* 489.7415, p. 269–273. issn: 0028-0836. doi: 10.1038/nature11472. url: http://dx.doi.org/10.1038/nature11472.

Polkinghorne, J (2002). *Quantum theory, a very short introduction*. Oxford: Oxford University press.

Schlosshauer, M., J. Kofler en A. Zeilinger (2013). „A Snapshot of Foundational Attitudes Toward Quantum Mechanics". In: *Studies in History and Philosophy of Science Part B: Studies in History and Philosophy of Modern Physics* 44.3, p. 222–230. doi: 10.1016/j.shpsb.2013.04.004. url: http://arxiv.org/abs/1301.1069.

Alfabetische index