

Quantum Rules!

Ultraviolet catastrophie

Het probleem

Bekijk een zwarte straler als een trilholve 'gevuld' met electromagnetische straling in thermisch evenwicht bij temperatuur T . Het aantal staande golven in een frequentie-interval $f, f + df$ per eenheid van volume:

$$N(f)df = \frac{8\pi f^2 df}{c^3}$$

De gemiddelde energie per staande golf wordt *klassiek* gegeven door equipartitie van energie (de 'nulde' wet van de thermodynamica):

$$E_{gem} = kT$$

De energie in een frequentie-interval $f, f + df$ per eenheid van volume:

$$U(f)df = \frac{8\pi f^2 kT df}{c^3}$$

Dit is de Raleigh-Jeans formulering. $U(f)df$ gaat naar oneindig als f naar oneindig gaat: de UV catastrofe

Planck

Het aantal staande golven is hetzelfde, maar iedere oscillator kan slechts discrete energie hebben.

$$E_n = nhf(\text{met } n = 0, 1, 2, \dots)$$

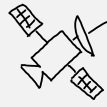
. Voor een set van oscillatoren wordt de gemiddelde energie

$$E_{gem} = \sum_n p_n \varepsilon_n,$$

waarbij p_n de waarschijnlijkheid weergeeft dat een oscillator de energie ε_n heeft. Voor p_n nam Planck de Maxwell-Boltzmann verdeling (*dat is niet juist!*).

$$\frac{e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}}{\sum_n e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}} = \frac{x^n}{\sum_n x^n} \text{ met } x \equiv e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \rightarrow$$

$$U(f)df = \frac{8\pi f^2 df}{c^3} \left(\frac{\sum_n nhf x^n}{\sum_n x^n} \right) \quad (1)$$



Quantum Rules!



Als $hf \gg kT$ is $x \ll 1$

kunnen we de volgende ontwikkelingen gebruiken:

$$(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + \dots = \sum_n x^n$$

en

$$x \frac{d}{dx} \sum_n x^n = \sum_n n x^n$$

Toegepast op 1:

$$\begin{aligned} U(f)df &= \frac{8\pi h f^3 df}{c^3} \frac{x \frac{d}{dx} (1-x)^{-1}}{(1-x)^{-1}} \\ &= \frac{8\pi h f^3 df}{c^3} \frac{x}{1-x} \\ &= \frac{8\pi h}{c^3} \frac{f^3 x df}{e^{\frac{hf}{kT}} - 1} \end{aligned}$$

Opmerking: Dit is het goede antwoord, maar met de kennis van nu kunnen we zeggen dat de afleiding onjuist is. De energie van een oscillator kan de waarde $(n + 1/2)hf$ aannemen en voor fotonen geldt de Bose-Einstein verdeling:

$$p(f) = \frac{1}{e^{\frac{hf}{kT}} - 1}$$

De uv-catastrophe is hiermee verdwenen. Als $f \rightarrow \infty$, dan $x \rightarrow 0$
vgl*: $u(f)df \rightarrow 0$

Anders gezegd: $x \rightarrow 0$, $p_n \rightarrow 0$; om p_n substantieel te houden moet f niet te groot zijn of T niet te laag. Bij een bepaalde temperatuur is er een bovengrens van de frequenties die bijdragen.

In hedendaags jargon: de bezettingsgraad van toestanden van een oscillator is temperatuurafhankelijk; toestanden waarvoor de energie groter is dan kT doen niet mee.